

## 2.7.22 Použití substituce při řešení rovnic

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $4\left(\frac{2x-3}{3x+1}-2\right)=\frac{2x-3}{3x+1}+3$

**Substituce:**  $y = \frac{2x-3}{3x+1} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $4(y-2) = y+3$ .

$$4y-8=y+3 \quad 3y=11 \quad y=\frac{11}{3}$$

**Návrat k původní proměnné:**  $y = \frac{11}{3} = \frac{2x-3}{3x+1} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $\frac{2x-3}{3x+1} = \frac{11}{3}$

Podmínka:  $3x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{3}$

$$\frac{2x-3}{3x+1} = \frac{11}{3} \quad / \cdot (3x+1) \quad 3(2x-3) = 11(3x+1) \quad x = -\frac{20}{27} \quad K = \left\{ -\frac{20}{27} \right\}$$

**Př. 2:** Vyřeš rovnici  $\frac{2t}{t+1} + 1 = 6\frac{t+1}{2t}$ .

**Substituce:**  $x = \frac{2t}{t+1}, \frac{t+1}{2t} = \frac{1}{\frac{t+1}{2t}} = \frac{1}{x} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x+1 = 6\frac{1}{x}$ .

$$x+1 = 6\frac{1}{x} \quad / \cdot x \quad x^2+x=6 \quad (x-2)(x+3)=0 \quad x_1=2 \quad x_2=-3$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$x_1=2 = \frac{2t}{t+1} \Rightarrow \text{Řešíme rovnici: } \frac{2t}{t+1} = 2 \quad / \cdot (t+1), \text{ podmínka } t \neq -1$$

$$2t = 2t+2 \quad 0=2 \quad - \text{to se nerovná} \Rightarrow \text{pro } x_1=2 \text{ nemám žádné } t.$$

$$x_2=-3 = \frac{2t}{t+1} \Rightarrow \text{Řešíme rovnici: } \frac{2t}{t+1} = -3 \quad / \cdot (t+1), \text{ podmínka } t \neq -1$$

$$2t = -3t-3 \quad 5t = -3 \quad t = -\frac{3}{5} \quad K = \left\{ -\frac{3}{5} \right\}$$

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $(u+1)^2 = 3|u+1| + 10$ .

$x = |u+1| \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = 3x + 10$ .

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (x-5)(x+2) = 0 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -2$$

**Návrat k původní proměnné:**

$|u+1| = |u - (-1)| = 5$  - hledáme čísla, jejichž obraz na číselné ose je od obrazu čísla  $-1$

vzdálen 5  $\Rightarrow u_1 = 4, u_2 = -6$

$x_2 = -2 = |u+1| \Rightarrow$  nemá řešení, absolutní hodnota nemůže být záporná  $K = \{-6; 4\}$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\sqrt{2(x^2 + 7x + 10)^2 - 7} = x^2 + 7x + 11$ .

**Substituce:** hodilo by se  $y = x^2 + 7x + 10$ , na pravé straně  $x^2 + 7x + 11 = x^2 + 7x + 10 + 1 = y + 1$

$$\sqrt{2y^2 - 7} = y + 1 \quad /^2 \quad (\sqrt{2y^2 - 7})^2 = (y + 1)^2 \quad 2y^2 - 7 = y^2 + 2y + 1$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \quad (y - 4)(y + 2) = 0 \quad y_1 = 4 \quad y_2 = -2$$

$$y_1 = 4$$

$$\sqrt{2 \cdot 4^2 - 7} = 4 + 1$$

$5 = 5$  - v pořádku  $y_1 = 4$  je kořen rovnice  $\sqrt{2y^2 - 7} = y + 1$

$$y_2 = -2$$

$$\sqrt{2 \cdot (-2)^2 - 7} = (-2) + 1$$

$1 \neq -1$  - nerovná se  $y_2 = -2$  není kořen rovnice  $\sqrt{2y^2 - 7} = y + 1$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $y_1: y_1 = 4 = x^2 + 7x + 10 \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 + 7x + 10 = 4$

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \quad (x + 6)(x + 1) = 0 \quad x_1 = -6 \quad x_2 = -1 \quad K = \{-6; -1\}$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ .

**Substituce:** použijeme  $y = x^2 \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $y^2 - 4y + 3 = 0$  obyčejná kvadratická rovnice.

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad (y - 3)(y - 1) = 0 \quad y_1 = 3 \quad y_2 = 1$$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $y_1: y_1 = 3 = x^2 \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = 3 \quad x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}$

Dosadíme  $y_2: y_2 = 1 = x^2 \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = 1 \quad x_3 = -1 \quad x_4 = 1$

$$K = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$$

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$ .

**Substituce:** použijeme  $y = x^2 \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $4y^2 - 5y - 9 = 0$  obyčejná kvadratická

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{5 \pm 13}{8}$$

$$y_1 = \frac{5 + 13}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \quad y_2 = \frac{5 - 13}{8} = -\frac{8}{8} = -1$$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $y_1: y_1 = \frac{9}{4} = x^2 \Rightarrow$  rovnici:  $x^2 = \frac{9}{4} \quad x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2}$

Dosadíme  $y_2: y_2 = -1 = x^2 \Rightarrow$  tady nenajdeme žádné kořeny, není číslo pro které je

po umocnění na druhou záporné  $K = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

**Př. 7:** Petáková:

strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)