

2.7.21 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici II

Předpoklady: 2720

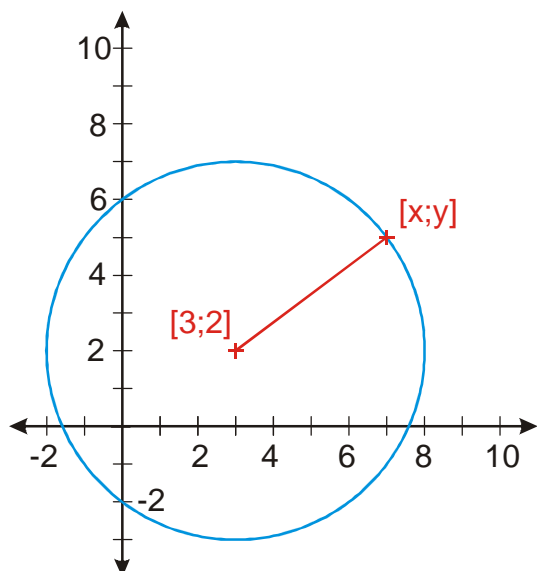
Soustavy s kvadratickou rovnicí se často vyskytují v analytické geometrii (náplň druhého pololetí třetího ročníku).

Typický příklad z analytické geometrie vypadá takto: Urči všechny body na přímce $y = 4 - x$, které mají od bodu $[3; 2]$ vzdálenost 5.

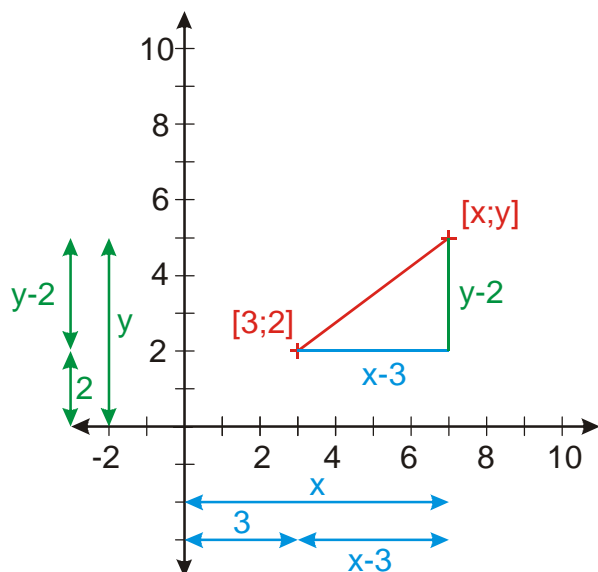
Každému geometrickému objektu odpovídá v analytické geometrii rovnice. Například body na přímce uvedené v zadání poznáme podle toho, že jejich souřadnice splňují rovnici $y = 4 - x$.

Pokud bod leží v průsečíku dvou objektů, musí splňovat obě rovnice \Rightarrow hledání průsečíků, pak přechází v řešení soustav rovnic.

Jak napíšeme: „vzdálenost od bodu $[3; 2]$ je 5“?



Hledaná vzdálenost bodu $X [x; y]$ od bodu je vyznačena červeně. Můžeme ji určit pomocí pravoúhlého trojúhelníku.



Z obrázku můžeme určit délky stran trojúhelníka a dosadit do Pythagorovy věty:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{dosadíme } c = 5, a = x - 3, b = y - 2)$$

$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5$ - tuto rovnici splňují všechny body modré kružnice na prvním obrázku (střed v bodě $[3; 2]$, poloměr 5), proto se používá jako rovnice kružnice (v umocněném tvaru na další řádce)

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5 \quad /^2 \quad - \text{ můžeme, vše je kladné}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$y = 4 - x$$

Zbytek postupu je obsahem následujícího příkladu.

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$
 $y = 4 - x$

soustava rovnic, řešíme dosazením $y = 4 - x$

$$(x-3)^2 + (4-x-2)^2 = 25$$

$$(x-3)^2 + (2-x)^2 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + (4 - 4x + x^2) = 25$$

$$2x^2 - 10x - 12 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x+1)(x-6) = 0$$

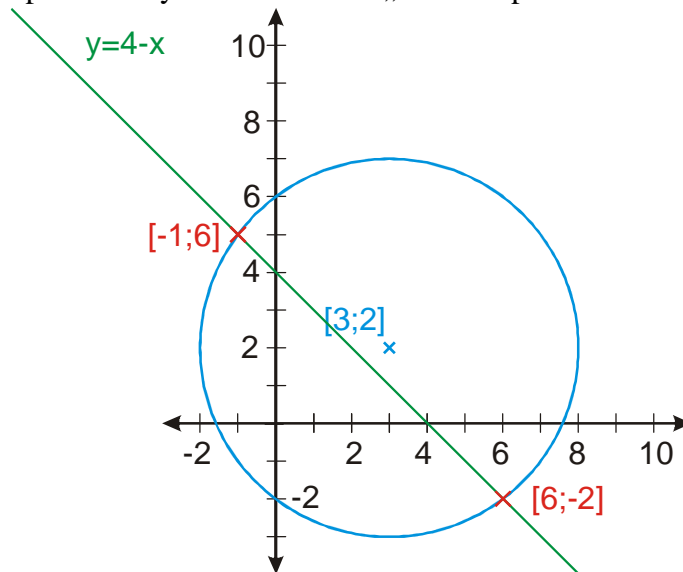
$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 4 - x_1 = 4 - (-1) = 5$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow y_1 = 4 - x_1 = 4 - 6 = -2$$

$K = \{[-1, 5]; [6, -2]\}$ \Rightarrow pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že na přímce

$y = 4 - x$ leží dva body $[-1, 5]$ a $[6, -2]$, které mají od bodu $[3; 2]$ vzdálenost 5.

Dodatek: Správnost výsledku můžeme „ověřit“ i pomocí obrázku:



Pedagogická poznámka: Následující příklad je uvedený jako BONUS, protože v podstatě nesouvisí s probíranou látkou a v daném okamžiku není důležité, aby jej řešili všichni. Rychlejší studenti si však mohou zkusit, jestli pochopili předchozí vysvětlování pořádně a dokáží ho použít i v jiném případě.

Př. 2: (BONUS) Najdi průsečík kružnic k_1 ($[0, 0]; r = 5$) a k_2 ($[-9, 9]; r = 13$)

Dosadíme do rovnice přímky, která má již v předchozím příkladě zmiňovaný tvar

$(x - s_x)^2 + (y - s_y)^2 = r^2$, kde $[s_x; s_y]$ jsou souřadnice jejího středu a r její poloměr.

$$k_1 : (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

$$k_2 : (x - (-9))^2 + (y - 9)^2 = 13^2$$

Po úpravě získáme soustavu rovnic:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + 18x + 81 + y^2 - 18y + 81 = 169$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7 \end{array}, \text{ kterou řešíme v následujícím příkladu}$$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7$$

V obou rovnicích jsou obě neznámé ve druhé mocnině \Rightarrow nelze dosazovat. Pomocí sčítací metody se můžeme v jedné z rovnic zbavit druhých mocnin:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\underline{[1] - [2]} \quad -18x + 18y = 18 \quad /:18$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$-x + y = 1$$

Teď už můžeme dosazovat – ze druhé rovnice $y = x + 1$

$$x^2 + (x+1)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad /: 2$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$K = \{[-4; -3]; [3; 4]\} \Rightarrow$ pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že zadané kružnice se protnou v bodech $[-4; -3]$ a $[3; 4]$.

Poznámka: Ještě elegantněji se mocnin v druhé rovnici zbavíme tím, že provedeme substituci a místo $x^2 + y^2$ napíšeme díky rovnosti z první rovnice 25. Jde fakticky samozřejmě o to samé k čemu dospějeme sčítáním rovnic, ale vypadá to elegantněji.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic: $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2$ $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2$.

Rovnice jsou ve složitém tvaru, nejdřív je upravíme:

1. rovnice: $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2 \quad / \cdot (x+1)$ podmínka $x \neq -1$

$$x + 2y + 3 = 2(x+1)$$

$$2y = x - 1$$

$$x - 2y = 1$$

2. rovnice: $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2 \quad / \cdot (y+1)$ podmínka $y \neq -1$

$$x + y + 2 = (x+2)(y+1)$$

$$x + y + 2 = xy + x + 2y + 2$$

$$xy + y = 0$$

Dosadíme z první rovnice do druhé: $x - 2y = 1 \Rightarrow x = 2y + 1$

$$(2y+1)y + y = 0$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$y(y+1) = 0$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2y_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 2y_2 + 1 = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \quad - \text{ tato dvojice nevyhovuje podmínce } x \neq -1$$

$$K = \{[1; 0]\}$$

Poznámka: K řešení je možné dospět i rychleji z rovnice $xy + y = 0$. Úpravou na součinnový tvar získáme $y(x+1) = 0 \Rightarrow x_2 = -1, y_1 = 0$. Druhá čísla do dvojic dopočítáme.

Pedagogická poznámka: Studenti samozřejmě poměrně často zapomínají na podmínky. Pokud někdo najde způsob řešení uvedený v tabulce, snažím se ho motivovat k tomu, aby jej dotáhl do konce. Půjde mi matematicky zajímavější než klasické řešení, protože vyžaduje lepší představu o tom, která čísla k sobě do dvojice patří. Po vyřešení třídou si poznámku ukazujeme.

$$y + 2z = 8$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic: $x - y + z = 2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

Použijeme dosazovací metodu. Nejdříve z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do zbývajících dvou:

$$y + 2z = 8 \Rightarrow y = 8 - 2z$$

$$y + 2z = 8$$

$$x - (8 - 2z) + z = 2$$

$$x^2 + (8 - 2z)^2 + z^2 = 14$$

$$y + 2z = 8$$

$$x - 8 + 3z = 2$$

$$x^2 + 64 - 32z + 4z^2 + z^2 = 14$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$x^2 + 5z^2 - 32z = -50$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do třetí:

$$x + 3z = 10 \Rightarrow x = 10 - 3z$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$(10 - 3z)^2 + 5z^2 - 32z = -50$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$100 - 60z + 9z^2 + 5z^2 - 32z = -50$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$14z^2 - 92z + 150 = 0$$

Poslední rovnice obsahuje jedinou proměnnou. Řešíme jako kvadratickou rovnicí:

$$14z^2 - 92z + 150 = 0 \quad /: 2$$

$$7z^2 - 46z + 75 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-46) \pm \sqrt{(-46)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 75}}{2 \cdot 7} = \frac{46 \pm \sqrt{16}}{14} = \frac{46 \pm 4}{14}$$

$$z_1 = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

$$z_2 = \frac{42}{14} = 3$$

Dopočteme ostatní proměnné:

$$z_1 = \frac{25}{7}$$

$$x_1 = 10 - 3z_1 = 10 - 3 \cdot \frac{25}{7} = -\frac{5}{7}$$

$$y_1 = 8 - 2z_1 = 8 - 2 \cdot \frac{25}{7} = \frac{6}{7}$$

$$z_2 = 3$$

$$x_2 = 10 - 3z_2 = 10 - 3 \cdot 3 = 1$$

$$y_2 = 8 - 2z_2 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$$

$$K = \left\{ \left[-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}; \frac{25}{7} \right]; [1; 2; 3] \right\}$$

Př. 6: Petáková:
strana 17/cvičení 33 d) e) g)

Shrnutí: Soustavy rovnic s kvadratickou rovnicí řešíme většinou dosazovací metodou. Sčítací metodu používáme na odstranění druhých mocnin z jedné z rovnic.