

2.7.20 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici I

Předpoklady: 2310, 2312, 2314, 2507

Zatím jsme řešili pouze soustavy lineárních rovnic. Jak se situace změní pokud jedna nebo více rovnic bude kvadratická (bude obsahovat buď druhou mocninu neznámé nebo součin neznámých)?

Př. 1: Vyřeš soustavu jedné rovnice o dvou neznámých: $x^2 + xy - 4y = 3$.

Dvě neznámé (= dvě možnosti volby) a jediná rovnice \Rightarrow zřejmě nekonečně mnoho řešení \Rightarrow budeme první neznámou volit a druhou vyjadřovat pomocí první (stejně jsme to dělali u lineárních rovnic. V podstatě se nic nezměnilo, jen tvar podmínky).

Kterou neznámou vyjadřovat? Lepší je y , x je v druhé mocnině, špatně by se vyjadřovalo (potřeboval bych vzorec pro kvadratickou rovnici).

$$x^2 + xy - 4y = 3$$

$$xy - 4y = 3 - x^2$$

$$y(x - 4) = 3 - x^2 \quad /: (x - 4) \text{ dělit můžeme pouze když } x \neq 4$$

$$y = \frac{3 - x^2}{x - 4}$$

$$K = \left\{ \left[x; \frac{3 - x^2}{x - 4} \right]; x \in \mathbb{R} - \{4\} \right\} \text{ ještě musíme vyzkoušet, co se stane pokud } x = 4 \text{ (to nesmíme}$$

dělit a nezískáme tak konečný vzorec)

$$y(x - 4) = 3 - x^2 \text{ - dosazujeme } x = 4$$

$$y(4 - 4) = 3 - 4^2$$

$$y \cdot 0 = -13 \text{ - opravdu to pro } x = 4 \text{ nemá řešení}$$

$$K = \left\{ \left[x; \frac{3 - x^2}{x - 4} \right]; x \in \mathbb{R} - \{4\} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Pokud studenti neví, jak mají rovnici řešit, je potřeba s nimi opětovně probrat podstatu (neznámé = možnost volby, rovnice = omezení, podmínka) a dojít k tomu, že příklad se od loňské situace liší pouze ve tvaru podmínky ne však v něčem podstatném. Podmínku studenti udělají jen výjimečně, dosazení do rovnice pak pokládají za zcela zbytečné.

Př. 2: Vyřeš soustavu jedné rovnice o dvou neznámých: $x(y - x) = 3(y - 3)$.

Velmi podobné předchozímu příkladu \Rightarrow zvolíme stejný postup (vyjádření y)

$$x(y - x) = 3(y - 3)$$

$$xy - x^2 = 3y - 9$$

$$xy - 3y = x^2 - 9$$

$y(x-3) = x^2 - 9 \quad /:(x-3)$ dělit můžeme pouze když $x \neq 3$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

$K = \{[x; x+3]; x \in \mathbb{R} - \{3\}\}$ ještě musíme vyzkoušet, co se stane pokud $x = 3$ (to nesmíme dělit a nezískáme tak konečný vzorec)

$$y(x-3) = x^2 - 9 \quad - \text{dosazujeme } x = 3$$

$$y(3-3) = 3^2 - 9$$

$y \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ rovnice vyjde bez ohledu na hodnotu $y \Rightarrow$ musíme do řešení dodat další dvojice

$$\{[3; y]; y \in \mathbb{R}\}$$

$$K = \{[x; x+3]; x \in \mathbb{R} - \{3\}\} \cup \{[3; y]; y \in \mathbb{R}\}$$

Pedagogická poznámka: Příklad má dva významy. Jednak se snaží studentům ukázat, že dosazení 3 není zbytečné (jak se zdálo v minulém příkladu) a jednak jde o přípravu na rovnice s parametrem.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

Dvě rovnice – spousta metod. Sčítací ne (není co odečíst) \Rightarrow dosazovací.

Ze které rovnice budeme dosazovat?

Z druhé, není tam druhá mocnina (ta sebou přináší vzorec pro kvadratickou rovnici).

$$2x - y = 6 \Rightarrow y = 2x - 6$$

Dosadím do první rovnice:

$$x^2 - (2x - 6)^2 = 9$$

$$x^2 - (4x^2 - 24x + 36) = 9$$

$$x^2 - 4x^2 + 24x - 36 = 9$$

$$0 = 3x^2 - 24x + 45 \quad /:3$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-5)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 6 = 2 \cdot 5 - 6 = 4$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 2x_2 - 6 = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$K = \{[5; 4]; [3; 0]\}$ - musíme do dvojic psát čísla, která patří k sobě.

Př. 4: Najdi dvě čísla taková, aby se jejich součin rovnal 1 a jejich součet:

a) 9

b) 2

c) 1.

a) součet 9

sestavíme rovnice

$$xy = 1 \quad - \text{součin se rovná } 1$$

$$x + y = 9 \quad - \text{součet se rovná } 9$$

Dosazovací metoda: $x + y = 9 \Rightarrow y = 9 - x$

$$x(9-x)=1$$

$$9x-x^2=1$$

$x^2-9x+1=0$ - kvadratická rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$$

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \Rightarrow y_1 = 9 - x_1 = 9 - \frac{9 - \sqrt{77}}{2} = \frac{18 - (9 - \sqrt{77})}{2} = \frac{9 + \sqrt{77}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 + \sqrt{77}}{2} \Rightarrow y_2 = 9 - x_2 = 9 - \frac{9 + \sqrt{77}}{2} = \frac{18 - (9 + \sqrt{77})}{2} = \frac{9 - \sqrt{77}}{2}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{9 - \sqrt{77}}{2}; \frac{9 + \sqrt{77}}{2} \right]; \left[\frac{9 + \sqrt{77}}{2}; \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \right] \right\}$$

b) součet 2

sestavíme rovnice

$$xy = 1 \quad - \text{ součin se rovná } 1$$

$$x + y = 2 \quad - \text{ součet se rovná } 2$$

Dosazovací metoda: $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad / \cdot x$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ - kvadratická rovnice

$$x_1 = x_2 = x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$K = \{[1;1]\}$$

c) součet 1

sestavíme rovnice

$$xy = 1 \quad - \text{ součin se rovná } 1$$

$$x + y = 1 \quad - \text{ součet se rovná } 1$$

Dosazovací metoda: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$x(1-x) = 1$$

$$x - x^2 = 1$$

$x^2 - x + 1 = 0$ - kvadratická rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-) \pm \sqrt{(-)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad - \text{ rovnice nemá řešení}$$

Když nejde nalézt vyhovující x nemá cenu hledat y , protože výsledek může být pouze dvojice čísel, kterou už jasně nenajdeme.

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Při řešení posledního příkladu se třída rozpadne podle rychlosti. Pomalejší studenti nedokáží spočítat všechny body. Chvilku před koncem hodiny si však společně zopakujeme, že při řešení soustavy s kvadratickou rovnicí mohou nastat různé situace, které odpovídají situacím při řešení kvadratické rovnice.

Př. 5: Petáková:
strana 17/cvičení 33 b) c) f)

Shrnutí: Soustavy rovnic s kvadratickou rovnicí řešíme většinou dosazovací metodou.