2.7.20 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici I

Předpoklady: 2310, 2312, 2314, 2507

Zatím jsme řešili pouze soustavy lineárních rovnic. Jak se situace změní pokud jedna nebo více rovnic bude kvadratická (bude obsahovat buď druhou mocninu neznámé nebo součin neznámých)?

Př. 1: Vyřeš soustavu jedné rovnice o dvou neznámých: $x^2 + xy - 4y = 3$.

Dvě neznámé (= dvě možnosti volby) a jediná rovnice $\Rightarrow$ zřejmě nekonečně mnoho řešení $\Rightarrow$ budeme první neznámou volit a druhou vyjadřovat pomocí první (stejně jsme to dělali u lineárních rovnic. V podstatě se nic nezměnilo, jen tvar podmínky).
Kterou neznámou vyjadřovat? Lepší je *y*, *x* je v druhé mocnině, špatně by se vyjadřovalo (potřeboval bych vzorec pro kvadratickou rovnici).

$x^2 + xy - 4y = 3$

$xy - 4y = 3 - x^2$

$y(x-4) = 3 - x^2 \quad / : (x-4)$ dělit můžeme pouze když $x \neq 4$

$y = \dfrac{3-x^2}{x-4}$

$K = \left\{ \left[x; \dfrac{3-x^2}{x-4} \right]; x \in R - \{4\} \right\}$ ještě musíme vyzkoušet, co se stane pokud $x = 4$ (to nesmíme dělit a nezískáme tak konečný vzorec)

$y(x-4) = 3 - x^2$ - dosazujeme $x = 4$

$y(4-4) = 3 - 4^2$

$y \cdot 0 = -13$ - opravdu to pro $x = 4$ nemá řešení

$K = \left\{ \left[x; \dfrac{3-x^2}{x-4} \right]; x \in R - \{4\} \right\}$

Pedagogická poznámka: Pokud studenti neví, jak mají rovnici řešit, je potřeba s nimi opětovně probrat podstatu (neznámé = možnost volby, rovnice = omezení, podmínka) a dojít k tomu, že příklad se od loňské situace liší pouze ve tvaru podmínky ne však v něčem podstatném.
Podmínku studenti udělají jen výjimečně, dosazení do rovnice pak pokládají za zcela zbytečné.

Př. 2: Vyřeš soustavu jedné rovnice o dvou neznámých: $x(y-x) = 3(y-3)$.

Velmi podobné předchozímu příkladu $\Rightarrow$ zvolíme stejný postup (vyjádření *y*)

$x(y-x) = 3(y-3)$

$xy - x^2 = 3y - 9$

$xy - 3y = x^2 - 9$

$y(x-3)=x^2-9 \quad /\cdot(x-3)$ dělit můžeme pouze když $x \neq 3$

$$y=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

$K=\{[x;x+3];x\in R-\{3\}\}$ ještě musíme vyzkoušet, co se stane pokud $x=3$ (to nesmíme dělit a nezískáme tak konečný vzorec)

$y(x-3)=x^2-9$ - dosazujeme $x=3$

$y(3-3)=3^2-9$

$y\cdot 0=0 \Rightarrow$ rovnice vyjde bez ohledu na hodnotu $y \Rightarrow$ musíme do řešení dodat další dvojice $\{[3;y];y\in R\}$

$K=\{[x;x+3];x\in R-\{3\}\}\cup\{[3;y];y\in R\}$

Pedagogická poznámka: Příklad má dva významy. Jednak se snaží studentům ukázat, že dosazení 3 není zbytečné (jak se zdálo v minulém příkladu) a jednak jde o přípravu na rovnice s parametrem.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{r} x^2-y^2=9 \\ 2x-y=6 \end{array}$.

Dvě rovnice – spousta metod. Sčítací ne (není co odečíst) $\Rightarrow$ dosazovací.
Ze které rovnice budeme dosazovat?
Z druhé, není tam druhá mocnina (ta sebou přináší vzorec pro kvadratickou rovnici).

$2x-y=6 \Rightarrow y=2x-6$

Dosadím do první rovnice:

$x^2-(2x-6)^2=9$

$x^2-(4x^2-24x+36)=9$

$x^2-4x^2+24x-36=9$

$0=3x^2-24x+45 \quad /:3$

$x^2-8x+15=0$

$(x-5)(x-3)=0$

$x_1=5 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2\cdot5-6=4$

$x_2=3 \Rightarrow y_2=2x_2-6=2\cdot3-6=0$

$K=\{[5;4];[3;0]\}$ - musíme do dvojic psát čísla, která patří k sobě.

Př. 4: Najdi dvě čísla taková, aby se jejich součin rovnal 1 a jejich součet:
a) 9 b) 2 c) 1.

a) součet 9
sestavíme rovnice

$xy=1$ - součin se rovná 1

$x+y=9$ - součet se rovná 9

Dosazovací metoda: $x+y=9 \Rightarrow y=9-x$

$x(9-x)=1$

$9x-x^2=1$

$x^2-9x+1=0$ - kvadratická rovnice

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{9\pm\sqrt{77}}{2}$$

$$x_1=\frac{9-\sqrt{77}}{2}\Rightarrow y_1=9-x_1=9-\frac{9-\sqrt{77}}{2}=\frac{18-\left(9-\sqrt{77}\right)}{2}=\frac{9+\sqrt{77}}{2}$$

$$x_2=\frac{9+\sqrt{77}}{2}\Rightarrow y_2=9-x_2=9-\frac{9+\sqrt{77}}{2}=\frac{18-\left(9+\sqrt{77}\right)}{2}=\frac{9-\sqrt{77}}{2}$$

$$K=\left\{\left[\frac{9-\sqrt{77}}{2};\frac{9+\sqrt{77}}{2}\right];\left[\frac{9+\sqrt{77}}{2};\frac{9-\sqrt{77}}{2}\right]\right\}$$

b) součet 2

sestavíme rovnice

$xy=1$ - součin se rovná 1

$x+y=2$ - součet se rovná 2

Dosazovací metoda: $xy=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}$

$x+\frac{1}{x}=2 \quad /\cdot x$

$x^2+1=2x$

$x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ - kvadratická rovnice

$x_1=x_2=x=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$

$K=\{[1;1]\}$

c) součet 1

sestavíme rovnice

$xy=1$ - součin se rovná 1

$x+y=1$ - součet se rovná 1

Dosazovací metoda: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$

$x(1-x)=1$

$x-x^2=1$

$x^2-x+1=0$ - kvadratická rovnice

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-)\pm\sqrt{(-)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ - rovnice nemá řešení

Když nejde nalézt vyhovující *x* nemá cenu hledat *y*, protože výsledek může být pouze dvojice čísel, kterou už jasně nenajdeme.

$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Při řešení posledního příkladu se třída rozpadne podle rychlosti. Pomalejší studenti nedokáží spočítat všechny body. Chvilku před koncem hodiny si však společně zopakujeme, že při řešení soustavy s kvadratickou rovnicí mohou nastat různé situace, které odpovídají situacím při řešení kvadratické rovnice.

Př. 5: Petáková:
strana 17/cvičení 33 b) c) f)

Shrnutí: Soustavy rovnic s kvadratickou rovnicí řešíme většinou dosazovací metodou.