2.7.19 Řešení nerovnic metodou nulových bodů II

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-1} \geq 1$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{1}{x-1} = 1$ **(abychom objevili nulové body nerovnice), kde** $\frac{1}{x-1} = 1 \quad / \cdot (x-1)$

$1 = x-1 \qquad x = 2$

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;1)$: vybereme číslo například 0:

  $\frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad \frac{1}{0-1} \geq 1 \qquad -1 \geq 1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-\infty;1)$ není řešením
- interval $(1;2)$: vybereme číslo například 1,5:

  $\frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad \frac{1}{1,5-1} \geq 1 \qquad 2 \geq 1$ - platí $\Rightarrow$ interval $(1;2)$ je řešením
- interval $(2;\infty)$: vybereme číslo například 3:

  $\frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad \frac{1}{3-1} \geq 1 \qquad 0,5 \geq 1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(2;\infty)$ není řešením

$\Rightarrow K = (1;2\rangle$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} \geq 0$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} = 0$ **(abychom objevili nulové body nerovnice), kde**

$\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} = 0$ - záleží pouze na čitateli $\qquad x^2-2-2=0$

$x_1 = 1-\sqrt{3} \qquad x_2 = 1+\sqrt{3}$

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;-3)$: vybereme číslo například -10:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} \geq 0 \qquad \frac{(-10)^2-2(-10)-2}{(-10)^2-(-10)-12} \geq 0 \; 1,2 \geq 0$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-\infty;-3)$
- interval $(-3;1-\sqrt{3})$: vybereme číslo například -2:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} \geq 0 \qquad \frac{(-2)^2-2(-2)-2}{(-2)^2-(-2)-12} \geq 0 \; -1 \geq 0$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-3;1-\sqrt{3})$
- interval $(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$: vybereme číslo například 0:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} \geq 0 \quad \frac{(0)^2-2(0)-2}{(0)^2-(0)-12} \geq 0 \qquad 0,167 \geq 0$ - platí $\Rightarrow$ interval $(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$

- interval $\left(1+\sqrt{3};4\right)$: vybereme číslo například 3:

  $\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\quad \dfrac{(3)^2-2(3)-2}{(3)^2-(3)-12}\geq 0$ $\quad -0{,}167\geq 0$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(1+\sqrt{3};4\right)$

- interval $(4;\infty)$: vybereme číslo například 5:

  $\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\quad \dfrac{(5)^2-2(5)-2}{(5)^2-(5)-12}\geq 0$ $\quad 1{,}625\geq 0$ - platí $\Rightarrow$ interval $(4;\infty)$ je řešením

$\Rightarrow\ K=(-\infty;3)\cup\left\langle 1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\rangle\cup(4;\infty)$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow$ $x^2-x-12=(x-4)(x+3)=0\Rightarrow x_1=-3;\ x_2=4$

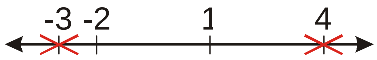
Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\neq -3;4$.

2. Hledáme řešení rovnice $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}=2$ **(abychom objevili nulové body nerovnice),**

$\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}=2 \quad /\cdot\left(x^2-x-12\right)$ $\qquad x^2-3x-22=2\left(x^2-x-12\right)$

$0=x^2+x-2$ $\qquad x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$

$x_1=-2$ $\qquad x_2=1$ Doplníme získané kořeny na osu:



3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;-3)$: vybereme číslo například -10:

  $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2$ $\quad \dfrac{(-10)^2-3(-10)-22}{(-10)^2-(-10)-12}\geq 2$ $\quad 1{,}1\geq 2$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-\infty;-3)$

- interval $(-3;-2)$: vybereme číslo například $-2{,}5$:

  $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2$ $\quad \dfrac{(-2{,}5)^2-3(-2{,}5)-22}{(-2{,}5)^2-(-2{,}5)-12}\geq 2$ $\quad 2{,}5\geq 2$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-3;-2)$

- interval $(-2;1)$: vybereme číslo například 0:

  $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2$ $\quad \dfrac{(0)^2-3(0)-22}{(0)^2-(0)-12}\geq 2$ $\quad 1{,}83\geq 2$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-2;1)$

- interval $(1;4)$: vybereme číslo například 3:

  $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2$ $\quad \dfrac{(3)^2-3(3)-22}{(3)^2-(3)-12}\geq 2$ $\quad 3{,}68\geq 2$ - platí $\Rightarrow$ interval $(1;4)$ je řešením

- interval $(4;\infty)$: vybereme číslo například 5:

  $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2$ $\quad \dfrac{(5)^2-3(5)-22}{(5)^2-(5)-12}\geq 2$ $\quad -1{,}5\geq 0$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(4;\infty)$

$\Rightarrow\ K=\left(-3;-2\right\rangle\cup\left\langle 1;4\right)$