

2.7.18 Řešení nerovnic metodou nulových bodů I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: V tuto hodinu platí hodně z poznámek k hodině předchozí, studenti mají problém orientací v příkladu, který vyžaduje řešení podúloh. Opět můžete očekávat značné problémy, rozdílné rychlosti postupu, ale vzhledem k tomu, že studenti se potřebují ze všeho nejvíce naučit orientaci v příkladu, řešení příkladů na tabuli nepomáhá.

Řešení nerovnic z minulé kapitoly bylo poměrně náročné na neustálé sledování znamének a nerovností. Nešlo by to jinak?

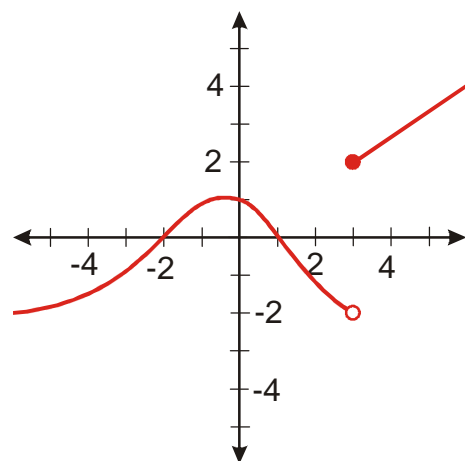
Řešíme: $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$.

Nerovnici upravíme na tvar $3\sqrt{3x-x^2-2} - x \geq 0$.

Výraz vlevo můžeme brát jako předpis pro nějakou funkci.

Grafické řešení – hledáme, kdy je graf nad nebo pod osou x .

Jak může obecně graf v „nejhorším“ případě funkce $y = f(x)$ vypadat?



Př. 1: Najdi řešení nerovnice $f(x) > 0$, pro funkci $y = f(x)$ na grafu výše.

Řešením nerovnice $f(x) > 0$ jsou všechna x , pro která je graf funkce $y = f(x)$ nad osou x .

- Hodnota funkce $y = f(x)$ je pro $x = 0$ větší než nula $\Rightarrow 0$ je řešením, stejně tak čísla kolem 0 až do místa, kde funkce přejde přes osu x (body $x = -2$ a $x = 1$).
- Hodnota funkce $y = f(x)$ je pro $x = 2$ menší než nula $\Rightarrow 2$ není řešením, stejně tak čísla kolem 2 až do místa, kde funkce přejde přes osu x (body $x = 1$ a $x = 3$).
- a tak dále v dalších intervalech

$$K = (-2; 1) \cup (3; \infty)$$

Jak se funkce může dostat přes osu x ?

- funkce má hodnotu 0 (body $x = -2$ a $x = 1$), pro takové x platí $f(x) = 0$ (což je rovnice), v konkrétním případě $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x \Rightarrow$ takové body najdeme, když budeme řešit rovnici $f(x) = 0$.
- funkce je přetržená (bod $x = 3$), u všech funkcí, které budeme používat na střední škole (mimo funkce $\text{sgn}(x)$), může přetržení nastat jenom tam, kde funkce není definována \Rightarrow takové body najdeme, když zjistím definiční obor výrazů v nerovnici a stanovíme podmínky řešitelnosti

\Rightarrow z předchozích úvah plyne

Postup řešení nerovnici metodou nulových bodů (např. nerovnice $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x$):

1. Zjistíme pro která x nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. (Kdy není definovaný libovolný výraz v nerovnici $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x$). **Našli jsme body přetržení.**
2. Vyřešíme rovnici $f(x) = 0$ (např. $3\sqrt{3x - x^2 - 2} = x$) a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu x .**
3. Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechny další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
4. **Nerovnice je vyřešena.**

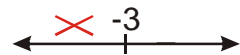
Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x+3} \geq x+1$ metodou nulových bodů.

1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: pod odmocninou musí být nezáporné číslo \Rightarrow

řešíme nerovnici $x+3 \geq 0$

$$x \geq -3$$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in (-\infty; -3]$.

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{x+3} = x+1$ (abychom objevili nulové body nerovnice, kde funkce přechází přes osu x).

$$\sqrt{x+3} = x+1 \quad /^2$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

Zkouška:

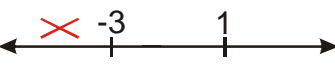
$$x_1 = -2 \quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{-2+3} = 1 \quad P = x+1 = -2+1 = -1$$

$$L \neq P$$

$$x_2 = 1 \quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2 \quad P = x+1 = 1+1 = 2$$

$$L = P$$

\Rightarrow jediný kořen $x = 1$

Doplňme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; -3)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.

- interval $(-3; 1)$: vybereme číslo například 0:

$$\sqrt{x+3} \geq x+1 \quad \sqrt{0+3} \geq 0+1$$

$$\sqrt{3} \geq 1 - \text{platí} \Rightarrow \text{interval } (-3; 1) \text{ není řešením}$$

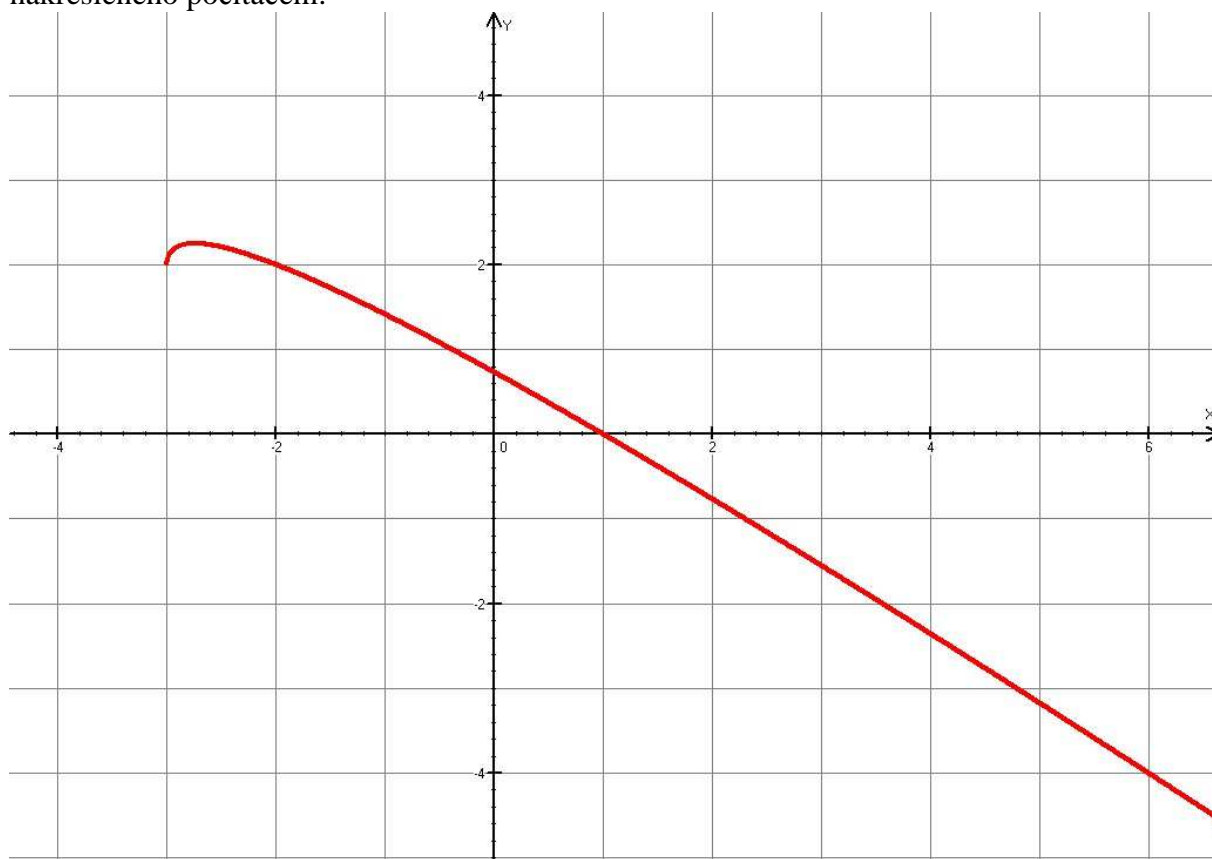
- interval $(2; \infty)$: vybereme číslo například 6 (kvůli odmocňování):

$$\sqrt{x+3} \geq x+1 \quad \sqrt{6+3} \geq 6+1$$

$$3 \geq 7 - \text{neplatí} \Rightarrow \text{interval } (2; \infty) \text{ není řešením}$$

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body $\Rightarrow K = \langle -3; 1 \rangle$

Poznámka: Správnost výsledku si můžeme ověřit pomocí grafu funkce $y = \sqrt{x+3} - (x+1)$ nakresleného počítačem:



Dodatek: V druhém kroku při řešení rovnice $\sqrt{x+3} \geq x+1$ není zcela nutné dělat zkoušku i když víme, že jeden z kořenů je zřejmě pouze zdánlivý. Naším úkolem v druhém kroku je najít všechny nulové body, pokud mezi ně započítáme i zdánlivý kořen nic se nestane, jenom budeme mít ve třetím kroku o jeden interval navíc.

Ted' se můžeme vrhnout na nejhorší příšernost minulé hodiny.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$ metodou nulových bodů.

1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: pod odmocninou musí být nezáporné číslo \Rightarrow

řešíme nerovnici $3x-x^2-2 \geq 0$

hledáme kořeny rovnice $3x-x^2-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

$$x_1=1, x_2=2$$

Před x je záporné číslo – „kopeček“



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

2. Hledáme řešení rovnice $3\sqrt{3x-x^2-2} = x$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu x .

$$\left(3\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 = (x)^2$$

$$3^2 \left(\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 = x^2$$

$$9(3x-x^2-2) = x^2$$

$$27x-9x^2-18 = x^2$$

$$10x^2-27x+18=0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2-4 \cdot 10 \cdot 18}}{2 \cdot 10} = \frac{27 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{27 \pm 3}{20}$$

$$x_1 = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Doplňme získané kořeny na osu:

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; 1)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.

- interval $\left(1; \frac{6}{5}\right)$: vybereme číslo například 1,1:

$$3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x \qquad 3\sqrt{3 \cdot 1,1 - (1,1)^2} - 2 \geq 1,1$$

$$0,9 \geq 1,1 - \text{neplatí} \Rightarrow \text{interval} \left(1; \frac{6}{5}\right) \text{ není řešením}$$

- interval $\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right)$: vybereme číslo například 1,3:

$$3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x \qquad 3\sqrt{3 \cdot 1,3 - (1,3)^2} - 2 \geq 1,3$$

$$1,37 \geq 1,3 - \text{platí} \Rightarrow \text{interval} \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right) \text{ je řešením}$$

- interval $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$: vybereme číslo například 1,7:

$$3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x \qquad 3\sqrt{3 \cdot 1,7 - (1,7)^2 - 2} \geq 1,7$$

$$1,37 \geq 1,7 - \text{neplatí} \Rightarrow \text{interval } \left(\frac{3}{2}; 2\right) \text{ není řešením}$$

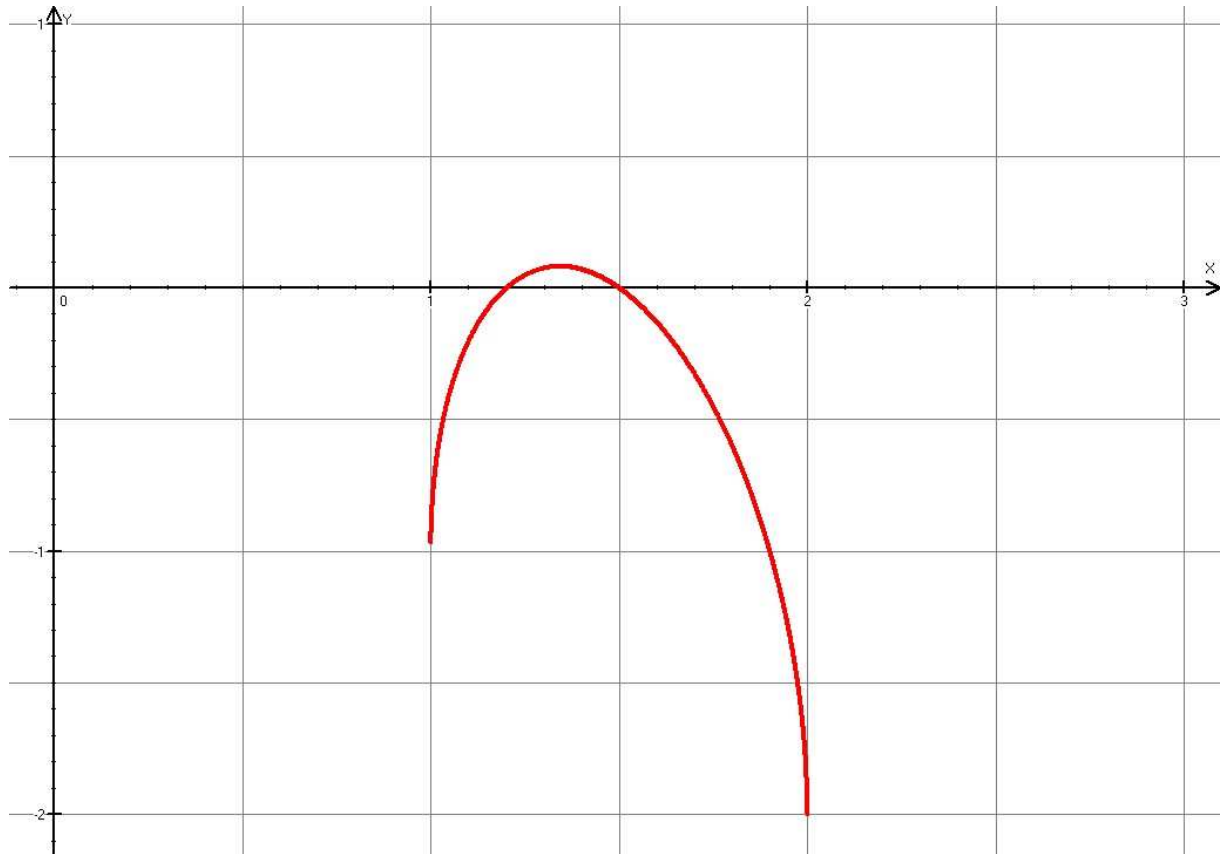
- interval $(2; \infty)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidám k nalezenému intervalu ještě nulové

body $\Rightarrow K = \left\langle \frac{6}{5}; \frac{3}{2} \right\rangle$

Poznámka: Správnost řešení můžeme demonstrovat i pomocí grafu funkce

$$y = 3\sqrt{3x - x^2 - 2} - x :$$



Př. 4: Petáková:
strana 14/cvičení 21 a) d)

Shrnutí: Při výpočtu metodou nulových bodů body přetržení a nulové body rozdělí osu x na intervaly, ve kterých ověříme platnost nerovnosti dosazením.