2.7.17 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Předpoklady: 2205, 2715

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi největší masakry během celého studia. Její obtížnost spočítává hlavně ve dvou věcech:
a) Je nutné, aby studenti uměli řešit kvadratické nerovnice (což je dva měsíce po jejich probrání poměrně odvážný požadavek).
b) Studenti si musí udržet přehled o tom, ,co a proč vlastně dělají,
Doporučuji dopředu upozornit studenty na nezbytnost rychlého řešení kvadratických nerovnic a toto upozornění ještě podepřít hrozbou nějaké znamínkové písemky.
Já osobně první část hodiny (úvodní rozbor a první dva lehké příklady) proberu o běžné hodině, další dva příklady pak studenti řeší zcela samostatně na cvičení. Většina z nich více nestihne (velká část nezvládne ani to), Ti rychlejší pak mají k dispozici sbírku.
Jsem přesvědčen, že řešení těžších příkladů na tabuli nemá valný smysl, protože při možnosti opisování se studenti v samostatné orientaci v příkladu vůbec neprocvičí.
Při pomoci v lavici se vždy ptám na to, zda studenti vědí, u kterého bodu postupu jsou, co právě dělají a co jim právě vyšlo.

Jak bychom řešili nerovnici $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$?
Musíme dostat x z pod odmocniny $\Rightarrow$ potřebujeme umocnit nerovnici.
Co udělá umocnění s nerovností?
Stejně jako u rovnic záleží na znaménkách, které mají obě strany nerovnosti v intervalu $(a;b)$:

- **1. V intervalu $(a;b)$ jsou obě strany nerovnice kladné** $L>0$, $P>0$.

  $3>2 \quad /^2$

  $9>4$ To je pravda. Nerovnost se zachovává, z většího čísla získáme větší druhou mocninu $\Rightarrow$ **umocníme, nemusíme nic jiného dělat, vzniklou nerovnici vyřešíme.**
- **2. V intervalu $(a;b)$ jsou obě strany nerovnice záporné** $L<0$, $P<0$.

  $(-3)<(-2) \quad /^2$

  $9<4$ To není pravda. Menší záporné číslo, má větší absolutní hodnotu, po umocnění se znaménko ztratí $\Rightarrow$ **musíme umocnit a zároveň obrátit nerovnost, pak vyřešit vzniklou nerovnici**.
- **3. V intervalu $(a;b)$ mají obě strany nerovnice různá znaménka** $L>0$, $P<0$.

  Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto.

  Platí: $L>0$, $0>P$ a tedy $L>P$ $\Rightarrow$ pokud má nerovnice má tvar $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$, tedy $L>P$. Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto. Všechna čísla, pro která platí $L>0$, $P<0$, nerovnici vyhovují.
- **4. V intervalu $(a;b)$ mají obě strany nerovnice různá znaménka** $L<0$, $P>0$.

  Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto.

  Platí: $L<0$, $0<P$ a tedy $L<P$ $\Rightarrow$ pokud má nerovnice má tvar $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$, tedy $L > P$. Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto, žádné číslo, pro které platí $L < 0$, $P > 0$, nerovnici vyhovuje.

$\Rightarrow$ Řešení nerovnic s odmocninami není žádná sranda, musíme se dobře orientovat v tom, co vlastně děláme. Neobejdeme se bez podmínek a řešení nerovnic, které rozhodují o znaménkách jednotlivých stran.
Smůla: Zkouška nám příliš nepomůže, protože nemůžeme vyzkoušet dosazením nekonečně mnoho čísel.
$\Rightarrow$ Budeme postupovat ve třech krocích:

1. Uděláme podmínky pro odmocniny a zjistíme, kdy je do nerovnice možné dosazovat.
2. Zjistíme znaménka obou stran nerovnice (intervaly, kdy jsou strany kladné a kdy záporné).
3. Podle rozboru uvedeného výše nerovnice umocníme a dořešíme nebo rovnou napíšeme řešení.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2\sqrt{2x+3} > 7$.

a) podmínky pro odmocniny
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $2x+3 \geq 0$.
$2x \geq -3$
$x \geq -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ aby pod odmocninou nebylo záporné číslo, můžeme dosazovat pouze $x \in \left\langle -\frac{3}{2};\infty \right)$.

b) znaménka
Levá strana: dvojnásobek odmocniny $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L = +$.
Pravá strana: $P = 7$ - kladné číslo $P = +$.

c) řešení
Řešit můžeme pouze pro $x \in \left\langle -\frac{3}{2};\infty \right)$. Pro všechna tato čísla platí: $L \geq 0$ $P > 0$ $\Rightarrow$ obě strany nezáporné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$2\sqrt{2x+3} > 7 \quad /^2$

$\left(2\sqrt{2x+3}\right)^2 > (7)^2$

$4(2x+3) > 49$

$8x+12 > 49$

$8x > 37$

$x > \frac{37}{8}$

$K = \left(\frac{37}{8};\infty\right)$

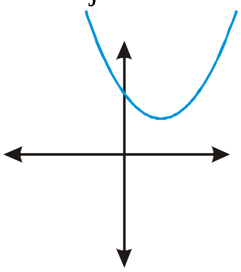
Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$.

a) podmínky

Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $x^2+x+2\geq 0$.
Hledáme kořeny rovnice $x^2+x+2=0 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-5}}{2} \Rightarrow$ rovnice $x^2+x+2=0$ nemá řešení.

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Nerovnice $x^2+x+2\geq 0$ platí pro všechna $x\in R$, za x můžeme dosadit cokoliv a pod odmocninou bude kladné číslo.

b) znaménka

- Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L>0$.
- Pravá strana: $P=x-3$ - může být kladná i záporná.
  $x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$
  $x\in(-\infty;3\rangle \Rightarrow P\leq 0$ pravá strana záporná.
  $x\in\langle 3;\infty) \Rightarrow P\geq 0$ pravá strana kladná.

c) řešení

1. $x\in(-\infty;3\rangle$: $L>0 \quad P\leq 0 \quad \Rightarrow L>P$

To je to, co chceme $\Rightarrow$ $K_1=(-\infty;3\rangle$.

2. $x\in\langle 3;\infty)$: $L\geq 0 \quad P\geq 0$

Obě strany kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$\sqrt{x^2+x+2}>x-3 \quad /^2$

$\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2>(x-3)^2$

$x^2+x+2>x^2-6x+9$
$7x>7$
$x>1$
$K_2=\langle 3;\infty)$

$K=(-\infty;3\rangle\cup\langle 3;\infty)=R$

Pedagogická poznámka: Najdou se tací, co už po dosazení do vzorce pro kvadratickou rovnici prohlásí, že nerovnice nemá řešení.
Velkým problémem je však zejména situace v intervalu $(-\infty;3\rangle$, kdy se mnozí nedokážou srovnat se faktem, že už nemusí nic počítat a rovnou mohou napsat výsledek.

Pedagogická poznámka: Více o této hodině nespočítáme a zbytek zůstává na cvičení (čím dříve po hodině, tím lépe).

Pedagogická poznámka: Jak již bylo uvedeno na začátku hodiny, naprostá většina chyb vyvěrá z toho, že studenti nejsou schopni si udržet přehled o tom, co vlastně dělají, ve které části řešení příkladu se právě nacházejí a jaký význam má to, co právě spočítali. Proto se zabýváme hlavně tím, kde se nacházejí a jak si mají zapsat poznámky, aby se orientovali.

Pedagogická poznámka: Boj s následujícím dvěma příklady patří mezi ty výjimky, kdy opíšu zadání (u dvou příkladů to není problém) na tabuli a na projektoru nechávám řešení zobrazovat delší dobu.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x-x^2+12} < \sqrt{7-3x}$.

a) podmínky

Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$

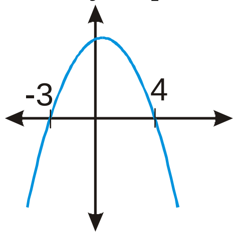
- **Levá strana:** řešíme nerovnici $-x^2+x+12 \geq 0$.

  Hledáme kořeny rovnice $-x^2+x+12=0 \Rightarrow$

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 12}}{2\cdot(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

  $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

  Před x je záporné číslo – „kopeček“ .

  Do levé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x \in \langle -3; 4 \rangle$.

- **Pravá strana:** řešíme nerovnici $7-3x \geq 0$.

  $7 \geq 3x$

  $\frac{7}{3} \geq x$

  Do pravé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x \in \left(-\infty; \frac{7}{3} \right\rangle$.

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \left\langle -3; \frac{7}{3} \right\rangle$.

b) znaménka

Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L \geq 0$

Pravá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $P \geq 0$

c) řešení

Obě strany jsou nezáporné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$\sqrt{x-x^2+12} < \sqrt{7-3x} \quad /^2$

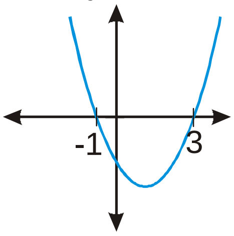
$\left(\sqrt{x-x^2+12}\right)^2 < \left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x-x^2+12 < 7-3x$

$0 < x^2-4x-5$

Řešíme nerovnici $x^2-4x-5>0$.
Hledáme kořeny rovnice $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$

$x_1=5$, $x_2=-1$.
Před x je kladné číslo – „kopeček“ .



Řešením nerovnice $x^2-4x-5>0$ jsou $x\in(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$.

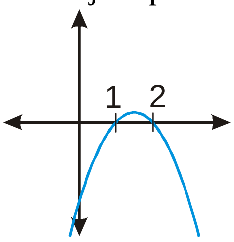
My jsme nerovnici řešili pouze pro $x\in\left\langle -3;\frac{7}{3}\right\rangle$.

Řešením nerovnice $\sqrt{x-x^2+12}<\sqrt{7-3x}$ je $K=\langle -3;-1)$.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$.

a) podmínky
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo. $\Rightarrow$

- **Levá strana**: řešíme nerovnici $3x-x^2-2\geq 0$.
  Hledáme kořeny rovnice $3x-x^2-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$
  $x_1=1$, $x_2=2$.
  Před x je záporné číslo – „kopeček“.



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\in\langle 1;2\rangle$.

b) znaménka
Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L\geq 0$.
Pravá strana: $P=x$ - může být kladná i záporná.

- $x\in(-\infty;0\rangle \Rightarrow P\leq 0$ pravá strana záporná.
- $x\in\langle 0;\infty) \Rightarrow P\geq 0$ pravá strana kladná.

Nerovnici však řešíme pouze pro $x\in\langle 1;2\rangle$, pro tato x je pravá strana vždy kladná.

c) řešení
Řešíme pouze pro $x\in\langle 1;2\rangle$.
Obě strany jsou kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x \qquad /^2$

$\left(3\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2\geq (x)^2$

$3^2\left(\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 \geq x^2$

$9\left(3x-x^2-2\right) \geq x^2$

$27x-9x^2-18 \geq x^2$

$0 \geq 10x^2-27x+18$

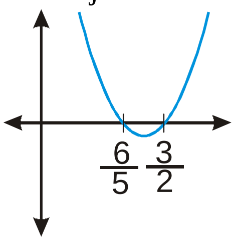
Řešíme nerovnici $10x^2-27x+18 \leq 0$.

Hledáme kořeny rovnice $10x^2-27x+18=0 \Rightarrow$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(-27)^2-4\cdot10\cdot18}}{2\cdot10}=\frac{27\pm\sqrt{9}}{20}=\frac{27\pm3}{20}$$

$x_1=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$, $x_2=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

Před x je kladné číslo – „kopeček".



Řešením nerovnice $10x^2-27x+18 \leq 0$ jsou $x \in \left\langle \frac{6}{5};\frac{3}{2} \right\rangle$.

My jsme nerovnici řešili pouze pro $x \in \langle 1;2 \rangle$.

Řešením nerovnice $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$ je množina $K=\left\langle \frac{6}{5};\frac{3}{2} \right\rangle$.

Př. 5: Petáková:
strana 14/cvičení 21 a) b) c) d)

Shrnutí: Před umocněním nerovnice musíme vědět, jaká znaménka mají její strany.