2.7.16 Rovnice s neznámou pod odmocninou II

Př. 1: Vyřeš rovnici $\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4$

$\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4 \quad /^2$

$y+2+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}+4(y-1)=16$

$5y+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18 \qquad 4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18-5y \quad /^2$

$16(y+2)(y-1)=324-180y+25y^2$

$9y^2-196y+356=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-196)\pm\sqrt{(-196)^2-4\cdot 9\cdot 356}}{2\cdot 9}=\frac{196\pm 160}{18}$$

$y_1=\frac{196\pm 160}{18}=\frac{178}{9} \qquad y_2=\frac{196-160}{18}=2$

Zkouška:

$y=\frac{178}{9} \qquad L=\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}==\sqrt{\frac{178}{9}+2}+2\sqrt{\frac{178}{9}-1}=\frac{14}{3}+2\frac{13}{3}=\frac{40}{3}$

$P=4 \qquad L\neq P \Rightarrow y=\frac{178}{9}$ není kořenem rovnice $\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4$

$y=2 \qquad L=\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}==\sqrt{2+2}+2\sqrt{2-1}=2+2\cdot 1=4$

$P=4 \quad L=P \qquad K=\{2\}$

Př. 2: Rozhodni, zda „zdánlivý“ kořen $y=\frac{178}{9}$ vznikl při prvním nebo druhém umocňování rovnice.

1. umocňování: $\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4 \quad /^2$ $\Rightarrow$ zdánlivý kořen nemůže vzniknout.

2. umocňování: $4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18-5y \quad /^2$

$4\sqrt{y+2}\cdot\sqrt{y-1}=4\sqrt{\frac{178}{9}+2}\cdot\sqrt{\frac{178}{9}-1}=\frac{728}{9} \qquad 18-5y=18-5\cdot\frac{178}{9}=-\frac{728}{9}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sqrt{x^2+16}=5$. Postupuj tak, aby nebylo nutné dělat zkoušku.

a) **odmocniny:** $x^2+16\geq 0$ - platí vždy ($x^2\geq 0$)
b) **umocňování:**
obě strany jsou před umocněním kladné $\Rightarrow$ při umocňování nemůže přibýt kořen $\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+16}=5 \quad /^2 \qquad x^2+16=25$

$x^2=9 \qquad x_1=3,\ x_2=-3 \qquad K=\{-3;3\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $2\sqrt{x^2-4x+4}=4-2x$.

$2\sqrt{x^2-4x+4}=4-2x \quad /^2 \qquad 4(x^2-4x+4)=16-16x+4x^2$

$0=0$

a) **odmocniny:**

$x^2-4x+4\geq 0$ $\quad$ $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$ - platí vždy

b) **umocňování:**

$4-2x\geq 0$ $\quad$ $4\geq 2x$ $\quad$ $2\geq x$

pro $x\in(-\infty;2\rangle$ je pravá strana nezáporná, stejně jako levá, pro tato *x* je umocnění ekvivalentní úpravou $\Rightarrow$ tato *x* jsou řešením

$K=(-\infty;2\rangle$

Upravíme levou stranu: $2\sqrt{x^2-4x+4}=2\sqrt{(x-2)^2}=2|x-2|$ $\quad$ (platí $\sqrt{x^2}=|x|$)

Př. 5: Vyřeš rovnici $2|x-2|=4-2x$.

$x\in(-\infty;2\rangle\Rightarrow x-2\leq 0\Rightarrow|x-2|=-x+2$ $\quad$ $2|x-2|=4-2x$

$2(-x+2)=4-2x$ $\quad$ $-2x+4=4-2x$

$0=0$ - rovnice platí pro všechna *x* z intervalu. $\quad$ $K_1=(-\infty;2\rangle$

$x\in\langle 2;\infty)\Rightarrow x-2\geq 0\Rightarrow|x-2|=x-2$ $\quad$ $2|x-2|=4-2x$

$2(x-2)=4-2x$ $\quad$ $2x-4=4-2x$ - zde je vidět, že v tomto intervalu jsou strany rovnice navzájem opačná čísla, po umocnění se budou rovnat

$4x=8$ $\quad$ $x=2$ $\quad$ $K_2=\{2\}$

$K=(-\infty;2\rangle$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{16x^2-48x+36}+3$.

$2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{16x^2-48x+36}+3$ - zdá se, že rovnici budeme muset umocnit, ale po prvním umocnění by odmocniny nezmizely, v rovnici by však už bylo x^2 (a po dalším umocnění x^4) $\Rightarrow$ zkusíme upravit odmocniny jinak

$2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{4(4x^2-12x+9)}+3$

$2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=2\sqrt{4x^2-12x+9}+3$

$2x-3=\sqrt{4x^2-12x+9}$ $\quad /^2$

$4x^2-12x+9=4x^2-12x+9$

$0=0$ $\Rightarrow$ stejná situace jako v předchozím příkladě. Rovnici můžeme napsat jako:

$2x-3=\sqrt{(2x-3)^2}$ (výraz pod odmocninou je druhou mocninou levé strany rovnice)

$\Rightarrow$ výraz pod odmocninou je vždy nezáporný $\Rightarrow$ do rovnice můžeme dosadit všechna čísla
kořeny přibudou, když mají obě strany rovnice různá znaménka:
pravá strana: vždy nezáporné číslo
levá strana: může být kladná i záporná $\Rightarrow$ řešením jsou taková *x*, pro která je levá strana rovnice nezáporné číslo $\Rightarrow$ $2x-3\geq 0$ $\Rightarrow$ $x\geq\frac{3}{2}$. $\quad$ $K=\left\langle\frac{3}{2};\infty\right)$

Př. 7: Petáková:
strana 14/cvičení 20 a) d) e) g) h) j)