

2.7.16 Rovnice s neznámou pod odmocninou II

Předpoklady: 2715

Př. 1: Vyřeš rovnici $\sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1} = 4$

$$\sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1} = 4 \quad /^2$$

$$(\sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1})^2 = (4)^2$$

$$y+2+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}+4(y-1)=16$$

$$5y+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18$$

$5y+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18$ - v tomto stavu nemůžeme násobit, na levé straně by byl vzorec a zůstala by tam odmocnina \Rightarrow převedeme y na levou stranu.

$$4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18-5y \quad /^2$$

$$(4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1})^2 = (18-5y)^2$$

$$16(y+2)(y-1) = 324 - 180y + 25y^2$$

$$16(y^2 + y - 2) = 324 - 180y + 25y^2$$

$$9y^2 - 196y + 356 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{(-196)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 356}}{2 \cdot 9} = \frac{196 \pm 160}{18}$$

$$y_1 = \frac{196 + 160}{18} = \frac{178}{9}$$

$$y_2 = \frac{196 - 160}{18} = 2$$

Zkouška:

$$y = \frac{178}{9}$$

$$L = \sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1} = \sqrt{\frac{178}{9}+2} + 2\sqrt{\frac{178}{9}-1} = \frac{14}{3} + 2\frac{13}{3} = \frac{40}{3}$$

$$P = 4$$

$$L \neq P \Rightarrow y = \frac{178}{9} \text{ není kořenem rovnice } \sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1} = 4$$

$$y = 2$$

$$L = \sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1} = \sqrt{2+2} + 2\sqrt{2-1} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$P = 4$$

$$L = P$$

$$K = \{2\}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je zařazen hlavně kvůli příkladu 2. Pokud nechcete se studenty příliš řešit problémy znamének při umocňování můžete obojí přeskočit.

Př. 2: Rozhodni, zda „zdánlivý“ kořen $y = \frac{178}{9}$ vznikl při prvním nebo druhém umocňování rovnice.

Zdánlivé kořeny vznikají, když umocňujeme rovnice ve tvaru, kdy se obě strany rovnají dvou navzájem opačným číslům \Rightarrow tedy když obě strany rovnice nemají stejné znaménko.

1. umocňování: $\sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-1} = 4 \quad /^2$

Levá strana: součet odmocnin \Rightarrow nezáporné číslo, pravá strana 4 \Rightarrow obě strany jsou nezáporné \Rightarrow zdánlivý kořen nemůže vzniknout.

2. umocňování: $4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1} = 18 - 5y \quad /^2$

Levá strana: součin odmocnin \Rightarrow nezáporné číslo, pravá strana může být kladné i záporná (v závislosti na hodnotě y) \Rightarrow protože jsme s rovnicí žádné další umocňování neprováděli, musel zdánlivý kořen vzniknout při této úpravě.

Můžeme si to vyzkoušet i dosazením (z hlediska vyřešení příkladu je to zbytečné):

$$4\sqrt{y+2} \cdot \sqrt{y-1} = 4\sqrt{\frac{178}{9}+2} \cdot \sqrt{\frac{178}{9}-1} = \frac{728}{9}$$

$$18 - 5y = 18 - 5 \cdot \frac{178}{9} = -\frac{728}{9}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sqrt{x^2+16} = 5$. Postupuj tak, aby nebylo nutné dělat zkoušku.

Mohli bychom vypočítat kořeny bez podmínek a dělat zkoušku.

Zkusíme podmínky:

a) **odmocniny:**

$x^2 + 16 \geq 0$ - platí vždy ($x^2 \geq 0$) – všechny možné výsledky budou z hlediska definičního oboru odmocniny správné

b) **umocňování:**

Umocňujeme výchozí tvar rovnice, zkoumáme jeho znaménka:

- levá strana rovnice je větší než nula,
- pravá strana rovnice je větší než nula.

Obě strany jsou před umocněním kladné \Rightarrow při umocňování nemůže přibýt kořen \Rightarrow umocňování je ekvivalentní úprava, vše, co vyjde je správně.

$$\sqrt{x^2+16} = 5 \quad /^2$$

$$(\sqrt{x^2+16})^2 = (5)^2$$

$$x^2 + 16 = 25$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3, x_2 = -3$$

$$K = \{-3; 3\}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je nutné ohlídat, aby studenti neměli v sešitě jeho pouhé mechanické vyřešení bez podmínek pro dosazení a umocňování. Zápis musí být takový, aby z něj jasně vyplývalo, že zkouška se dělat nemusí a oba kořeny rovnice $x^2 = 9$ můžeme prohlásit za kořeny rovnice $\sqrt{x^2 + 16} = 5$.

Př. 4: Vyřeš rovnici $2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4 - 2x$.

$$2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4 - 2x \quad /^2$$

$$\left(2\sqrt{x^2 - 4x + 4}\right)^2 = (4 - 2x)^2$$

$$4(x^2 - 4x + 4) = 16 - 16x + 4x^2$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 16 - 16x + 4x^2$$

$$0 = 0$$

Zdá se, že rovnici vyhovují všechna reálná čísla. Při postupu jsme umocňovali \Rightarrow nevíme, která z nich jsou opravdová a která přibyla umocněním.

Zkoušku udělat nelze – nemůžeme vyzkoušet nekonečně mnoho čísel.

Nezbývá než udělat podmínky:

a) **odmocniny:**

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\text{Hledáme kořeny: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0 \quad - \text{platí vždy (druhá mocnina je vždy větší nebo rovna nule)} \Rightarrow$$

všechny možné výsledky budou z hlediska odmocniny správné.

b) **umocňování:**

Umocňujeme výchozí tvar rovnice \Rightarrow zkoumáme znaménka stran:

- levá strana rovnice je nezáporná (dvojnásobek odmocniny),
- pravá strana rovnice může mít obě znaménka.

Umocňování je ekvivalentní úprava, když obě strany nemají opačná znaménka \Rightarrow zjišťujeme, kdy je pravá strana nezáporná.

$$4 - 2x \geq 0$$

$$4 \geq 2x$$

$$2 \geq x$$

Pro $x \in (-\infty; 2)$ je pravá strana nezáporná, stejně jako levá, pro tato x je umocnění ekvivalentní úpravou \Rightarrow tato x jsou řešením.

$$K = (-\infty; 2)$$

Příklad je možné řešit i jinak, bez umocňování:

$$\text{Upravíme levou stranu: } 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2\sqrt{(x - 2)^2} = 2|x - 2| \quad (\text{platí } \sqrt{x^2} = |x|)$$

Získáváme tedy rovnici: $2|x - 2| = 4 - 2x$, kterou samozřejmě řešit umíme.

Pedagogická poznámka: Studentů, kteří přijdou na to, že uvnitř odmocniny je druhá mocnina a je tedy možné ji odstranit není zanedbatelně málo. Naprostá většina

z nich však zapomene na absolutní hodnotu a špatně píše:

$$2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2\sqrt{(x-2)^2} = 2(x-2).$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $2|x-2| = 4-2x$.

$$x \in (-\infty; 2) \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$$

$$2|x-2| = 4-2x$$

$$2(-x+2) = 4-2x$$

$$-2x+4 = 4-2x$$

$0=0$ - rovnice platí pro všechna x z intervalu.

$$K_1 = (-\infty; 2)$$

$$x \in \langle 2; \infty) \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$2|x-2| = 4-2x$$

$$2(x-2) = 4-2x$$

$2x-4 = 4-2x$ - zde je vidět, že v tomto intervalu jsou strany rovnice navzájem opačná čísla, po umocnění se budou rovnat.

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K = (-\infty; 2)$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě okamžikem, kdy kontroluji, zda si studenti pamatují, jak se rovnice s absolutní hodnotou řeší. Výsledek na tabuli neukazuji, kdo příklad nedokáže spočítat sám, musí ho dodělat doma.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pouhým bonbónkem. Většinou si stihneme na konci hodiny maximálně popovídat, jak by bylo možné ho vyřešit, ale počítání zůstane na doma.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{16x^2 - 48x + 36} + 3$.

$2x + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{16x^2 - 48x + 36} + 3$ - zdá se, že rovnici budeme muset umocnit, ale po prvním umocnění by odmocniny nezmizely, v rovnici by však už bylo x^2 (a po dalším umocnění x^4) \Rightarrow zkusíme upravit odmocniny jinak.

$$2x + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{4(4x^2 - 12x + 9)} + 3$$

$$2x + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 2\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + 3$$

$$2x - 3 = 2\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$$

$$2x - 3 = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \quad /^2$$

$$(2x-3)^2 = (\sqrt{4x^2 - 12x + 9})^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

$0 = 0 \Rightarrow$ stejná situace jako v předchozím příkladě. Rovnici můžeme napsat jako:

$$2x - 3 = \sqrt{(2x - 3)^2} \quad (\text{výraz pod odmocninou je druhou mocninou levé strany rovnice})$$

\Rightarrow výraz pod odmocninou je vždy nezáporný \Rightarrow do rovnice můžeme dosadit všechna čísla. Falešné kořeny přibudou, když mají obě strany rovnice různá znaménka:

- pravá strana: vždy nezáporné číslo,
- levá strana: může být kladná i záporná

\Rightarrow řešením jsou taková x , pro která je levá strana rovnice nezáporné číslo $\Rightarrow 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow$

$$x \geq \frac{3}{2}.$$

$$K = \left\langle \frac{3}{2}; \infty \right\rangle$$

Př. 7: Petáková:

strana 14/cvičení 20 a) d) e) g) h) j)

Shrnutí: Pokud po umocňování vyjde rovnice, která po úpravách vede k rovnosti $0 = 0$, neznamená to, že řešením jsou všechna reálná čísla.