

2.7.14 Mocniny s iracionálním mocnitelem

Předpoklady: 2713

Nejdříve si dopočítáme pár příkladů z minulé hodiny.

Př. 1: Zjednoduš výraz $\frac{\left(x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}}$.

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} &= \frac{\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(y^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \frac{x^{\frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3}} \cdot y^{\frac{9 \cdot 2}{8 \cdot 3}} \cdot z^{-\frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{6}\right)}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \frac{x^{\frac{10}{12}} \cdot y^{\frac{9}{12}} \cdot z^{-\frac{9+10}{12}}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \\ &= x^{\frac{10-9}{12}} \cdot y^{\frac{9-8}{12}} \cdot z^{\frac{-9+10}{12}} = x^{\frac{1}{12}} \cdot y^{\frac{1}{12}} \cdot z^{\frac{1}{12}} = (xyz)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{xyz} \end{aligned}$$

Př. 2: Zjednoduš výrazy převedením na racionální mocniny.

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ b) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{a}{b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

b) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \left(ab \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(ab \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} b^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{11}{12}} b^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{24}} b^{\frac{13}{24}}$

Pedagogická poznámka: Studenti mají s bodem a) předchozího příkladu pro mě nečekané

problémy. Jednak špatně přepisují odmocniny takto $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ (někteří mají špatně opsané i zadání), jednak mají problém s tím, jestli mohou a dávat dohromady, když jsou ve dvou různých zlomcích.

Př. 3: Zjednoduř výrazy převedením na racionální mocniny:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

$$\text{a) } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \left(2 \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \left(2^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot 2^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \left(4 \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^2 \left(2^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{5}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{2^5}$$

Pedagogická poznámka: Nejvíce chyb pramení ze špatného přepisu odmocnin na závorky.

Jaké mocniny už umíme:

Přirozený mocnitel

a^3

$a^3 = a \cdot a \cdot a$

Celý mocnitel

a^{-2}

$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \cdot a}$

Mocnitel 0

a^0

$a^0 = 1$

Odmocnina

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}}$ je takové číslo, aby $(\sqrt{a})^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.

Racionální mocnitel $a^{\frac{2}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ $a^{\frac{2}{3}}$ je takové číslo, aby $(\sqrt[3]{a^2})^3 = \left((a^2)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^2$.

Pomocí racionálního mocnitele umíme vypočíst i hodně ošklivé věci:

$\sqrt[15]{3^7} = 3^{\frac{7}{15}}$ - Číslo, které když dáme na 15 vyjde $3^7 = 2187 \Rightarrow \sqrt[15]{3^7} = 3^{\frac{7}{15}} \doteq 1,669769737$.

$\text{Zkouška: } 1,669769737^{15} = 2187,000006 \doteq 2187 = 3^7$.

Umíme určit mocninu na jakémkoliv racionální číslo. Zbývají ještě čísla iracionální. Co by znamenalo $2^{\sqrt{2}}$?

Význam výrazu $2^{\sqrt{2}}$ závisí na významu výrazu $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ není možné napsat konečným desetinným rozvojem, ale můžeme dopočítat libovolný počet desetinných míst pomocí dvou číselných řad, které se stále přibližují a které ohraničují hodnotu $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} 1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 &\Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2 &\Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2 &\Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414^2 = 1,999396 < 2 < 2,002225 = 1,415^2 &\Rightarrow 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\ 1,4142^2 = 1,99996164 < 2 < 2,00024449 = 1,4143^2 &\Rightarrow 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\ 1,41421^2 = 1,9999899241 < 2 < 2,0000182084 = 1,41422^2 &\Rightarrow 1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422 \end{aligned}$$

Takto můžeme za dlouhých zimních večerů pokračovat libovolně dlouho. Například při určování $\sqrt{2}$ na 100 míst:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038850387534327641573$$

Ted' už můžeme podobným způsobem aproximovat hodnotu $2^{\sqrt{2}}$. Využijeme přibližné hodnoty $\sqrt{2}$ z předchozího schématu:

$$\begin{aligned} 2 &= 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 = 4 \\ 2,6 &< 2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} < 2,9 \\ 2,65 &< 2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} < 2,68 \\ 2,664 &< 2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} < 2,667 \\ 2,6651 &< 2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} < 2,6654 \\ 2,66513 &< 2^{1,41421} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,41422} < 2,66516 \end{aligned}$$

a tak dále. Za ještě delších zimních večerů můžeme určit hodnotu $2^{\sqrt{2}}$ klidně na sto desetinných míst:

$$2^{\sqrt{2}} = 2.665144142690225188650297249873139848274211313714659492835979593364920446178705954867609180005196417$$

Poznámka: $2^{1,4}$, $2^{1,5}$ a další jsou opět iracionální čísla. Nemůžeme tedy uvést jejich přesnou hodnotu, proto u čísel nalevo od $2^{\sqrt{2}}$ používáme číslo určitě menší (dolní odhad) napravo pak číslo určitě větší (horní odhad).

Stejně výpočty můžeme provést i libovolné jiné iracionální číslo \Rightarrow hodnotu výrazu a^r můžeme určit na libovolný počet desetinných míst pro každé $a \in R^+$ a $r \in R \Rightarrow$ jako mocnitel můžeme použít libovolné reálné číslo.

Stejně tak platí i vzorce pro výpočty s mocninami:

Pro všechna kladná reálná čísla a, b a pro všechna reálná čísla r, s platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r$$

Př. 4: Vypočti bez použití kalkulačky:

$$\text{a) } (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} \qquad \text{b) } \frac{2^{2+\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}-1}} \qquad \text{c) } \left((2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} \qquad \text{d) } 2^{2\sqrt{2}} \cdot 4^{1-\sqrt{2}}$$

$$\text{a) } (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

$$\text{b) } \frac{2^{2+\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}-1}} = 2^{2+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)} = 2^3 = 8$$

$$\text{c) } \left((2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}} = 2^6 = 64$$

$$\text{d) } 2^{2\sqrt{2}} \cdot 4^{1-\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} \cdot (2^2)^{1-\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{2-2\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

Př. 5: Petáková:
strana 63/cvičení 53 d) e) g) h)
strana 63/cvičení 54 g) h)

Shrnutí: Pro kladná reálná čísla můžeme zavést i mocniny s iracionálním mocnitelem.