2.7.13 Mocniny s racionálním mocnitelem

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}$
- Ale co znamená $2^{\frac{2}{3}}$?

$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2^p\right)^2 = 2^1 \qquad 2^{2p} = 2^1$

$2p = 1 \qquad p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Možná platí: $\sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}$.

Př. 1: Spočti: $\left(\sqrt{2}\right)^3$ a $\sqrt{2^8}$ do dvou sloupců, jednak klasicky pomocí vzorců pro úpravy odmocnin a jednak nahrazením $\sqrt{(\ )} = (\ )^{\frac{1}{2}}$ a použitím vzorců pro úpravy mocnin.

$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2^8} = \sqrt{\left(2^4\right)^2} = 2^4$

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1\, 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2^8} = \left(2^8\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{8 \cdot \frac{1}{2}} = 2^4$

Př. 2: Navrhni nahrazení třetí odmocniny mocninou.

$\sqrt[3]{a} = a^p$ použijeme $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$. $\quad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(a^p\right)^3 = a^1 \qquad a^{3p} = a^1$

$3p = 1 \qquad p = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$

Př. 3: Podobně jako v příkladu 1 ověř, že je možné třetí odmocninu nahradit racionálním mocnitelem.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^7 = \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = \sqrt[3]{a^6}\,\sqrt[3]{a} = a^2\,\sqrt[3]{a}$

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{12} = \sqrt{\left(a^4\right)^3} = a^4$

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^7 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^7 = a^{\frac{7}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^2\, 2^{\frac{1}{3}} = a^2\,\sqrt[3]{a}$

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{12} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$

Pro každé kladné reálné číslo a, pro každé přirozené číslo n platí: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Pro každé kladné reálné číslo a, pro každé celé číslo m, pro každé přirozené číslo n platí: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Př. 4: Zapiš pomocí racionálního mocnitele:

a) $\sqrt[7]{3}$ b) $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[5]{a^{-6}}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6$

a) $\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$ b) $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[5]{a^{-6}} = a^{-\frac{6}{5}}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6 = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^6} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^{-6} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$

Pro všechna kladná reálná čísla *a,b* a pro všechna racionální čísla *r,s* platí:

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad \left(ab\right)^r = a^r b^r \qquad a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Př. 5: Zjednoduš výrazy:

a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$ b) $\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$ c) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ d) $\dfrac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}$

a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2+4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

b) $\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = a^{\frac{9\cdot 4}{2\cdot 3}} = a^{\frac{36}{6}} = a^6$

c) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

d) $\dfrac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = a^{1+\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = a^3$

Př. 6: Částečně odmocni převedením na racionálního mocnitele $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2\sqrt{a}$

Př. 7: Zjednoduš následující výrazy převedením na racionálního mocnitele.

a) $\sqrt[12]{2^{18}}$ b) $\sqrt[4]{4}$ c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$

a) $\sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \left(a\left(a^{10}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^5\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^6\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

Př. 8: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny převedením na racionálního mocnitele.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9}$ c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3+4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{10+5+8}{20}} = 3^{\frac{23}{20}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{3+4+5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$

Př. 9: Petáková:
strana 63/cvičení 49 e) h) i)
strana 63/cvičení 50 e)
strana 63/cvičení 51 b) c) f)
strana 63/cvičení 42 c) f)