

## 2.7.13 Mocniny s racionálním mocnitelem

**Předpoklady:** 2711, 2712

Racionální číslo - číslo, které je možné zapsat zlomkem.

Co už umíme s mocninami?

Víme, co znamená:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}$
- Ale co znamená  $2^{\frac{2}{3}}$ ?

Porovnáme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami:

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & (ab)^n &= a^n b^n \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} & ((a)^r)^s &= a^{sr}\end{aligned}$$

Odmocniny a mocniny se chovají stejně a to určitě nebude samo sebou!

Nejsou odmocniny speciálním typem mocnin?

**Pedagogická poznámka:** Studenty vyzvu, aby sami vymysleli, jakým racionálním číslem by

bylo možné zapsat  $\sqrt{2}$ . Je zajímavé, že se vždy objeví pár návrhů na  $\frac{1}{2}$  a téměř nic jiného. Bohužel většinou jde pouze o návrhy bez pořádného zdůvodnění. Snažíme se poté diskutovat, jaké dobré důvody existují pro nahrazení odmocniny mocninou na jednu polovinu.

Zkusíme zjistit, jaký exponent by byla druhá odmocnina:

$$\sqrt{2} = 2^p \quad \text{použijeme } (\sqrt{2})^2 = 2^1.$$

$$(\sqrt{2})^2 = (2^p)^2 = 2^1$$

$$2^{2p} = 2^1$$

$$2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Možná platí: } \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}.$$

Zkusíme, zda funguje upravování odmocnin.

**Př. 1:** Spočti:  $(\sqrt{2})^3$  a  $\sqrt{2^8}$  do dvou sloupců, jednak klasicky pomocí vzorců pro úpravy odmocnin a jednak nahrazením  $\sqrt{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{2}}$  a použitím vzorců pro úpravy mocnin.

Úprava pomocí vzorců pro odmocniny.

Úprava pomocí vzorců pro mocniny

$$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = 2^4$$

(používáme  $\sqrt{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{2}}$ ).

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2^8} = (2^8)^{\frac{1}{2}} = 2^{8 \cdot \frac{1}{2}} = 2^4$$

U všech předchozích výpočtů bychom místo  $\sqrt{(\quad)}$  mohli psát  $(\quad)^{\frac{1}{2}}$ . Zdá se, že pro druhou odmocninu platí:  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ .  
Jak je to se třetí odmocninou?

**Př. 2:** Navrhni nahrazení třetí odmocniny mocninou.

$${}^3\sqrt{a} = a^p \text{ použijeme } ({}^3\sqrt{a})^3 = a.$$

$$({}^3\sqrt{a})^3 = (a^p)^3 = a^1$$

$$a^{3p} = a^1$$

$$3p = 1$$

$$p = \frac{1}{3} \Rightarrow {}^3\sqrt{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$$

**Př. 3:** Podobně jako v příkladu 1 ověř, že je možné třetí odmocninu nahradit racionálním mocnitelem.

Zkoušíme  ${}^3\sqrt{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$ .

Úprava pomocí vzorců pro odmocniny.

$$({}^3\sqrt{a})^7 = \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{a} = a^2 \sqrt[3]{a}$$

$$({}^3\sqrt{a})^{12} = \sqrt{(a^4)^3} = a^4$$

Úprava pomocí vzorců pro mocniny

(používáme  $\sqrt[3]{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{3}}$ ).

$$({}^3\sqrt{a})^7 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^7 = a^{\frac{7}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^2 \sqrt[3]{a}$$

$$({}^3\sqrt{a})^{12} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

**Pedagogická poznámka:** Počáteční část hodiny je možné poměrně snadno urychlit i zpomalit. Většinou u příkladu nečekám, až ho udělají všichni, a nechám ho vypracovat pouze těm nejrychlejším, ostatní se něj jenom podívají.

Nápad funguje i pro  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$  zřejmě platí:  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ,  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

Vysvětluje se vzorec:  $\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ .  $(\sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m})$

**Pedagogická poznámka:** Rozdíly ve způsobu vnímání matematiky ukazují moje neúspěšná

snaha přesvědčit jednu studentku o tom, že postup  $\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  ukazuje „krácení v odmocninách“ lépe než jenom uvedení vzorce ve větě z minulé hodiny.

Naše úvahy nejsou matematicky dostatečně průkazné, ale jiní to dokázali za nás platí:

**Pro každé kladné reálné číslo  $a$ , pro každé přirozené číslo  $n$  platí:  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ .**

**Pro každé kladné reálné číslo  $a$ , pro každé celé číslo  $m$ , pro každé přirozené číslo  $n$  platí:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .**

**Př. 4:** Zapiš pomocí racionálního mocnitele:

a)  $\sqrt[7]{3}$

b)  $\sqrt[6]{a^3}$

c)  $\sqrt[5]{a^{-6}}$

d)  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6$

a)  $\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$

b)  $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$

c)  $\sqrt[5]{a^{-6}} = a^{-\frac{6}{5}}$

d)  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6 = \frac{1}{(\sqrt[4]{a})^6} = (\sqrt[4]{a})^{-6} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$

**Pedagogická poznámka:** Problémy se vyskytují prakticky jenom v posledním bodě d), kde se snažím trvat na starém „nemusíte dělat všechno na jednou, po malých správných krocích se musíte dostat až k výsledku. Většinou si ukazujeme, že právě u bodu d) správných cest existuje více.

Následkem předchozích definic se pravidla pro počítání s odmocninami sloučí s pravidly pro počítání s mocninami

**Pro všechna kladná reálná čísla  $a, b$  a pro všechna racionální čísla  $r, s$  platí:**

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

**Pedagogická poznámka:** Studenti se s racionálními mocniteli sžívají pro mě až překvapivě snadno a následující příklady jim nedělají v podstatě žádné potíže. V případě bezradnosti stačí odkázat na rámeček se vzorci.

**Př. 5:** Zjednoduř výrazy:

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \quad \text{b) } \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} \quad \text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d) } \frac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2+4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

$$\text{b) } \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = a^{\frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3}} = a^{\frac{36}{6}} = a^6$$

$$\text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

$$\text{d) } \frac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{1 + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)} = a^3$$

**Pedagogická poznámka:** U následujících příkladů se někteří vzpírají a chtějí k úpravám nadále používat odmocniny. Z cvičných důvodů trvám na použití racionálních mocnin s tím, že později si samozřejmě mohou vybrat.

**Př. 6:** Částečně odmocni převedením na racionálního mocnitele  $\sqrt[6]{a^{15}}$ .

$$\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2 + \frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2 \sqrt{a}$$

**Př. 7:** Zjednoduř následující výrazy převedením na racionálního mocnitele.

$$\text{a) } \sqrt[12]{2^{18}} \quad \text{b) } \sqrt[4]{4} \quad \text{c) } \sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$$

$$\text{a) } \sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1 + \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \left(a(a^{10})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (a \cdot a^5)^{\frac{1}{3}} = (a^6)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

**Př. 8:** Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny převedením na racionálního mocnitele.

$$\text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \quad \text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \quad \text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$$

$$\text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1+2}{3}} = 3^{\frac{3+4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{10+5+8}{20}} = 3^{\frac{23}{20}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$$

$$\text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1+2+5}{3+2+6}} = a^{\frac{3+4+5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$$

**Pedagogická poznámka:** Další příklady následují v první polovině příští hodiny.

**Př. 9:** Petáková:  
strana 63/cvičení 49 e) h) i)  
strana 63/cvičení 50 e)  
strana 63/cvičení 51 b) c) f)  
strana 63/cvičení 42 c) f)

**Shrnutí:** Odmocniny můžeme nahradit mocninami s racionálním mocnitelem.