2.7.12 Počítání s odmocninami II

Př. 1: Sestav začátek věty o odmocninách, která končí vztahem: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$.

Čísla *m* a *n* jsou jako exponenty odmocniny – musí být přirozená.
Číslo *a* je základem odmocniny – musí být nezáporné.

Pro všechna přirozená čísla m, n **a pro každé reálné nezáporné číslo** a **platí:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Př. 2: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla výrazy:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}$

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2\cdot3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[3\cdot2]{3^3} = \sqrt[6]{3^3\cdot3^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Př. 3: Částečně odmocni výraz $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{a^3} = a\cdot a\cdot\sqrt[2\cdot3]{a^3} = a^2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = a^2\sqrt{a}$

Pro všechna přirozená čísla m, n, p **a pro každé nezáporné číslo** a **platí:**

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Př. 4: Částečně odmocni výraz $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[2\cdot3]{a^{3\cdot5}} = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a} = a^2\sqrt{a}$

Př. 5: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a) $\sqrt[12]{2^{18}}$ b) $\sqrt[4]{4}$ c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[10]{a^5}}$

a) $\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[2\cdot6]{2^{3\cdot6}} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2\cdot2]{2^2} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \sqrt[3]{aa^5} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[10]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt{a}$

společná odmocnina: $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3\cdot4]{a^{2\cdot4}}\cdot\sqrt[4\cdot3]{a^{3\cdot3}} = \sqrt[12]{a^8\cdot a^9} = \sqrt[12]{a^{8+9}} = \sqrt[12]{a^{17}} = a\cdot\sqrt[12]{a^5}$.

Př. 6: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{9}$ c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[2\cdot3]{3^3}\cdot\sqrt[3\cdot2]{3^{2\cdot2}} = \sqrt[6]{3^3\cdot3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3\cdot\sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{9} = \sqrt[20]{3^{10}}\cdot\sqrt[20]{3^5}\cdot\sqrt[20]{3^8} = \sqrt[20]{3^{10+5+8}} = \sqrt[20]{3^{23}} = 3\cdot\sqrt[20]{3^3}$

c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[2\cdot3]{a^3}\cdot\sqrt[3\cdot2]{a^{2\cdot2}}\cdot\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^{3+4+5}} = \sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[6]{a^{2\cdot6}} = a^2$

Př. 7: Zjednoduš výraz $\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^3\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{b}{a}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Př. 8: Zjednoduš výrazy:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2^2}\sqrt{2}}}=\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2^3}}}=\sqrt{2\sqrt[4]{2^3}}=\sqrt{\sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{2^3}}=\sqrt{\sqrt[4]{2^7}}=\sqrt[8]{2^7}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{\sqrt{2^2}\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}}=\sqrt[4]{2^2\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[4]{2^2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\sqrt{2^4}\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\sqrt{2^5}}=\sqrt[8]{2^5}$

Př. 9: Zjednoduš výrazy:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$ b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$ c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1$

b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=1+\sqrt{3}$

Pedagogická poznámka: Body a) a c) počítáme společně u tabule. U bodu a) se při výkladu snažím, abychom uvažovali dopředu a přemýšleli už při usměrňování zlomku, jaký výraz by se nám hodil v čitateli (studenti mají tendenci závorky roznásobit a tím ztratí druhou mocninu. Poslední bod c) je v podstatě vychytávkou, kterou nemá šanci student, který nezná použitý trik, samostatně vyřešit. Tímto způsobem to studentům podávám s tím, že je přesto zajímavé, že při zpětném pohledu to jinak ani být nemohlo.

Př. 10: Petáková:

strana 60/cvičení 28 a)
strana 60/cvičení 30 h)
strana 60/cvičení 31 a)
strana 60/cvičení 35 b) d)
strana 60/cvičení 36 b)