

## 2.7.12 Počítání s odmocninami II

**Předpoklady:** 2711

**Př. 1:** Sestav začátek věty o odmocninách, která končí vztahem:  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ .

Čísla  $m$  a  $n$  jsou jako exponenty odmocniny – musí být přirozená.  
Číslo  $a$  je základem odmocniny – musí být nezáporné.

**Pro všechna přirozená čísla  $m, n$  a pro každé reálné nezáporné číslo  $a$  platí:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

**Př. 2:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla výrazy:

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

c)  $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}}$

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{2^6}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

c)  $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

**Př. 3:** Částečně odmocni výraz  $\sqrt[6]{a^{15}}$ .

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^3} = a \cdot a \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{a^3} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^3} = a^2 \sqrt{a}$$

Předchozí výpočet je možné urychlit pomocí další (a poslední) věty:

**Pro všechna přirozená čísla  $m, n, p$  a pro každé nezáporné číslo  $a$  platí:**

$$\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Př. 4:** Částečně odmocni výraz  $\sqrt[6]{a^{15}}$ .

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^{3 \cdot 5}} = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$$

**Př. 5:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a)  $\sqrt[12]{2^{18}}$

b)  $\sqrt[4]{4}$

c)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[10]{a^5}}$

a)  $\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[2 \cdot 6]{2^{3 \cdot 6}} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}$

b)  $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

c)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \sqrt[3]{aa^5} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[10]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt{a}$

Poslední vztah nepoužíváme pouze pro zjednodušování odmocnin, ale někdy i obráceně.

Zkusíme napsat výraz  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$  jednou odmocninou.  $\Rightarrow$  **Problém:** vzorec  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  můžeme požit pouze v případě, že jde o stejný typ odmocniny, zatím máme každou odmocninu jinou.

Vzorec  $\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$  nám umožní změnit:

- $\sqrt[3]{a^2}$  na odmocninu šestou, devátou, dvanáctou, patnáctou...
- $\sqrt[4]{a^3}$  na odmocninu osmou, dvanáctou, šestnáctou ...

$\Rightarrow$  Obě odmocniny převedeme na dvanácté (připomíná to převádění na společný jmenovatel při sčítání zlomků):  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3 \cdot 4]{a^{2 \cdot 4}} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{a^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{a^8 \cdot a^9} = \sqrt[12]{a^{8+9}} = \sqrt[12]{a^{17}} = a \cdot \sqrt[12]{a^5}$ .

**Př. 6:** Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny:

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

b)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9}$

c)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^3} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{3^5} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$

b)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[20]{3^{10}} \cdot \sqrt[20]{3^5} \cdot \sqrt[20]{3^8} = \sqrt[20]{3^{10+5+8}} = \sqrt[20]{3^{23}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$

c)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^4 \cdot a^5} = \sqrt[6]{a^{3+4+5}} = \sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[6]{a^{2 \cdot 6}} = a^2$

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti mají s předchozím příkladem problémy.

V některých případech pomáhá, když studentům ještě jednou připomenete, že chování mocnin a odmocnin připomíná sčítání zlomků.

**Př. 7:** Zjednoduš výraz  $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$ .

$$\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

**Př. 8:** Zjednoduš výrazy:

a)  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

b)  $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

a)  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2^2}\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2^3}} = \sqrt{2^4\sqrt{2^3}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[8]{2^7}$

b)  $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^2}\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[8]{2^5}$

**Pedagogická poznámka:** Opět příklad na procvičení postupného upravování, orientace a odolnosti proti zbrklému rychlořešení.

**Př. 9:** Zjednoduš výrazy:

a)  $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$

b)  $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$

c)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

a)  $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

b)  $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

c)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$

**Pedagogická poznámka:** Body a) a c) počítáme společně u tabule. U bodu a) se při výkladu snažím, abychom uvažovali dopředu a přemýšleli už při usměrňování zlomku, jaký výraz by se nám hodil v čitateli (studenti mají tendenci zápornky roznásobit a tím ztratí druhou mocninu. Poslední bod c) je v podstatě vychytávkou, kterou nemá šanci student, který nezná použitý trik, samostatně vyřešit. Tímto způsobem to studentům podávám s tím, že je přesto zajímavé, že při zpětném pohledu to jinak ani být nemohlo.

**Př. 10:** Petáková:

strana 60/cvičení 28 a)

strana 60/cvičení 30 h)

strana 60/cvičení 31 a)

strana 60/cvičení 35 b) d)

strana 60/cvičení 36 b)

**Shrnutí:**