2.7.11 Počítání s odmocninami I

Př. 1: Dokonči následující větu tak, aby byla rozšířením předchozího pravidla pro více čísel: „Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1, a_2 ... a_r$ platí:“

Pro všechna přirozená čísla n, r **a pro všechna nezáporná reálná čísla** $a_1, a_2 ... a_r$ **platí:**

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_r}$$

Př. 2: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6}$ c) $\sqrt[4]{64}$ d) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 7} \cdot \sqrt{7 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$
$\left(\sqrt{7}\right)^2 \left(\sqrt{3}\right)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{16 \cdot 4} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{4} = 2 \cdot \sqrt[4]{4}$ (výraz jde upravovat dál, uvidíme později)

d) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6$

Př. 3: Částečně odmocni:

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{50}$

e) $\sqrt[3]{24}$ f) $\sqrt[4]{48}$ g) $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt{24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$

g) $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6} + 4\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$

Př. 4: Zjednoduš:

a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$ b) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$

c) $\sqrt[3]{12}\left(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{4}\right) - \sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}\right)$

a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{2}\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}\sqrt{2} + 3 = 1$

b) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right) =$
$= \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{6}\sqrt{3} - \sqrt{6}\sqrt{6} =$
$2 + \sqrt{6} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 3 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6 = -7 + 6\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{12}\left(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{4}\right) - \sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} =$
$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 3 - 2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{2} - 2 =$
$4 - 2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{2} = 2\left(2 - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}\right)$

Př. 5: Petáková:

Př. 6: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$ c) $\sqrt{\frac{14}{9}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}}$

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ c) $\sqrt{\frac{14}{9}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 8}{9 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Pro každé celé číslo s, každé kladné reálné číslo a a každé přirozené číslo n platí: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$

Př. 7: Porovnej dvě předchozí matematické věty (pro vzorce $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$) a vysvětli rozdíly v podmínkách, které jsou kladeny na hodnotu čísla a.

Vzorec $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: všechna nezáporná čísla a.. Vzorec $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$: všechna kladná čísla a.

$\Rightarrow$ Vzorec $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$ zakazuje nulovou hodnotu a. Proč?

V předpokladu věty uvažujeme s jako celé číslo $\Rightarrow$ s může být záporné $\Rightarrow$ a se nesmí rovnat nule, protože záporné mocniny je možné utvořit pouze pro nenulové hodnoty (zlomek $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ by měl ve jmenovateli nulu).

Př. 8: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ c) $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}$

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{4}$ b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^2 = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 = 2$

Př. 9: Usměrni zlomky:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e) $\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5+2\sqrt{6}$

$$\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}} \cdot \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left(1-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2-5} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1-2\sqrt{3}+3-5} =$$

e) $= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+1} \cdot \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sqrt{5}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+1}{4 \cdot 3-1} =$

$= \frac{7+2\sqrt{15}-3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{11}$

Př. 10: Petáková:
strana 60/cvičení 26 d) i) k)
strana 60/cvičení 27 b)