2.7.7 Inverzní funkce

Předpoklady: 2104, 2108

Pedagogická poznámka: Stihnout celý obsah této hodiny za 45 minut znamená docela úprk, ale jak mám vyzkoušené až na dokončení posledního příkladu je to zvládnutelné.

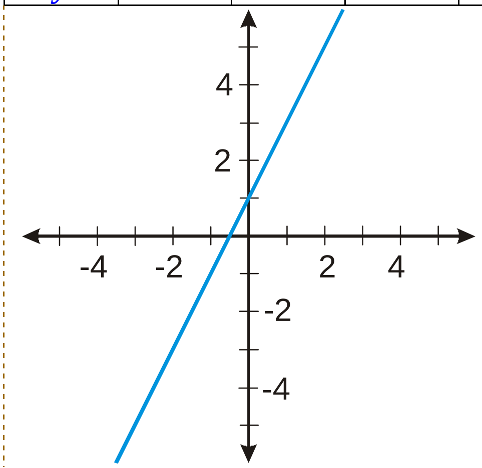
Pedagogická poznámka: Většina příkladů v této hodině (až na poslední dva) slouží spíše k dokumentování výkladu, proto ani já všechna zadání někdy nepromítám nebo zadám jiná.

Co znamená slovo „inverzní“?
Něco jako „obrácená“. (Například inverze u počasí znamená, že ve vyšších polohách je vyšší teplota. Normální stav je obrácený.)

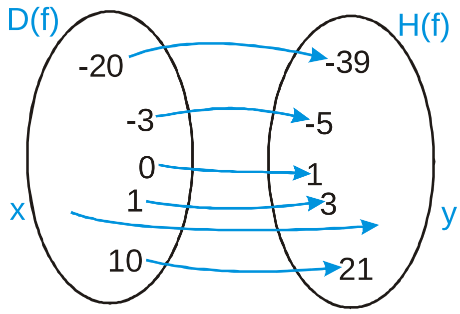
Co bude znamenat inverzní „obrácená“ funkce?

Př. 1: Je dána funkce $y = 2x + 1$. Napiš tabulku hodnot této funkce pro pět hodnot proměnné *x* ($x \in \{-20; -3; 0; 1; 10\}$) a nakresli její graf.

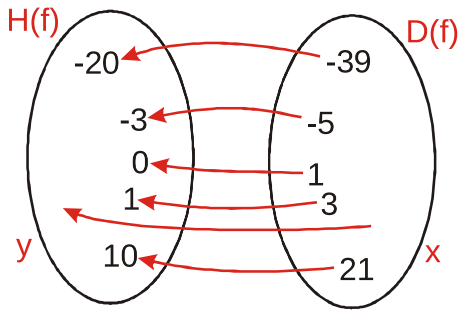
x	-20	-3	0	1	10
y	-39	-5	1	3	21



Jaký je význam funkce?
Funkce $y = f(x)$ je předpis, jak z jednoho čísla vyrobit jiné, tak aby každému *x* náleželo maximálně jedno *y* (požadavek jednoznačnosti).
Schéma přiřazování:



Inverzní (obrácená) funkce $y = f^{-1}(x)$ **je funkce s obráceným směrem šipek. Tedy:**



$\Rightarrow$ **prohodil se význam *x* a *y*,** $D(f)$ **a** $H(f)$**.**

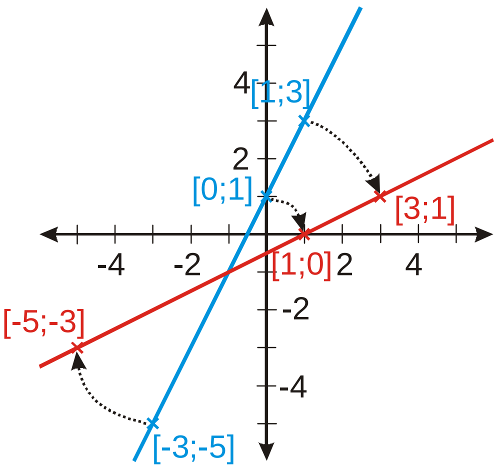
Platí: $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$.

Pedagogická poznámka: Při práci s inverzními funkcemi je důležité neustále vědět, která funkce je původní a která je inverzní. Proto je v celé hodině důsledně používána modrá barva pro původní funkce a červená pro funkci inverzní.

Př. 2: Nakresli tabulku hodnot inverzní funkce, které odpovídají tabulce hodnot původní funkce z příkladu 1.

x	-39	-5	1	3	21
y	-20	-3	0	1	10

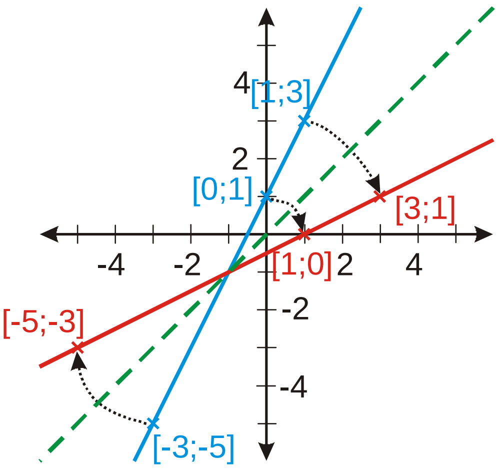
Př. 3: Do předchozího obrázku s grafem funkce $y = 2x + 1$ dokresli graf inverzní funkce a vyznač do něj, dvojice odpovídajících si bodů původní a inverzní funkce.



Které body na obrázku jsou společné pro graf původní i inverzní funkce?
Oba grafy mají společný jediný bod $[-1;-1]$.

Proč je bod $[-1;-1]$ společný pro oba grafy?
Má obě souřadnice stejné, jejich prohození se neprojeví.
$\Rightarrow$ Stejně se budou chovat všechny body na přímce $y = x$.

Jaký je geometrický vztah mezi oběma grafy?
Oba grafy jsou souměrné podle osy $y = x$.



Existuji funkce, které jsou inverzní sami ze sebou?
Jsou to takové funkce, jejichž graf je souměrný podle osy $y = x$. Například $y = x$ nebo $y = \frac{1}{x}$.

Př. 4: Najdi předpis inverzní funkce k funkci $y = 2x + 1$.

Z grafu je zřejmé, že inverzní funkce je lineární. Hledáme předpis: $y = ax + b$. Pro dvě neznámé potřebujeme dvě rovnice.

Vybereme si tedy souřadnice 2 bodů (viz tabulka), např.: $[1;0];[3;1]$ a dosadíme do předpisu $y=ax+b \Rightarrow$ soustava: $\begin{matrix} 0=a\cdot 1+b \\ 1=a\cdot 3+b \end{matrix}$.

Po odečtení rovnic: $1=2a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Dosadíme do první rovnice $0=a\cdot 1+b \Rightarrow 0=\frac{1}{2}1+b \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$.

Inverzní funkce má předpis: $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.

Pedagogická poznámka: Pokud je trochu čas můžete chvilku podiskutovat o tom, které body budou pro vypočet koeficientů lineární funkce nejvhodnější. Pokud je naopak času málo, můžete předchozí příklad přeskočit a rovnou určit předpis prohozením neznámých v předpisu.

Jak najít předpis inverzní funkce rychleji?
Inverzní funkce vznikne obrácením šipek, tedy prohozením x a y $\Rightarrow$ prohodíme x a y i v předpisu funkce:

- Původní funkce: $y=2x+1$.
- Prohodíme x s y: $x=2y+1$.
- Potřebujeme tvar $y=$ $\Rightarrow$ musíme upravovat: $x-1=2y$
- Výsledek: $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.

Získali jsme stejný výsledek jako pomocí dosazování do předpisu lineární funkce.

Předpis inverzní funkce získáme prohozením x a y v předpisu původní funkce a úpravou na tvar $y=$.

Má funkce $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ inverzní funkci?
Už ji známe, jde o původní funkce $y=2x+1$, všechno potřebné jsme už vypočítali.

Inverze je vzájemný vztah dvou funkcí. Je-li druhá funkce inverzní k první je i první inverzní k druhé.

Má každá funkce funkci inverzní?
Musíme buď dokázat, že ano, nebo najít funkci, která nemá inverzní funkci.

Př. 5: Zkus najít funkci, která nemá funkci inverzní.

Konstantní funkce $y=1$ nemá funkci inverzní.

x	0	1	2
y	1	1	1

Funkce k ní inverzní by měla tabulku:

x_i	1	1	1
y_i	0	1	2

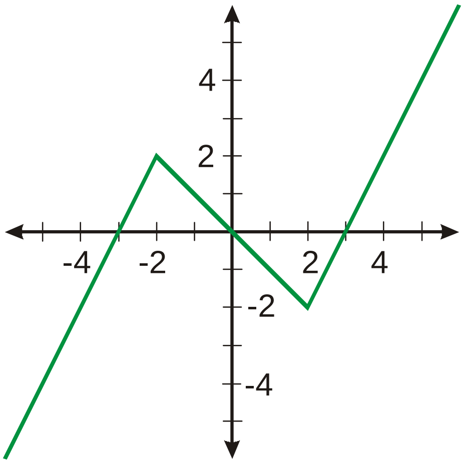
Toto není funkce. K jednomu *x* náleží více *y*.
$\Rightarrow$ Konstrukce inverzní funkce zkrachuje u každé funkce, která k jednomu *y* přiřazuje různá *x* (po prohození *x* a *y* bychom jednomu *x* přiřazovali různá *y* a to už by nebyla funkce) $\Rightarrow$ **inverzní funkci můžeme nalézt pouze pro prosté funkce.**

Př. 6: Najdi další funkce, které nemají funkci inverzní.

$y = |x|$; $y = x^2$ atd.
Žádná sudá funkce nemá funkci inverzní.

Př. 7: Rozhodni, zda platí, že všechny liché funkce mají funkci inverzní.

Neplatí. Na obrázku je funkce, která je lichá, ale není prostá a tak nemá funkci inverzní.



Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že skoro vždy se najde někdo, kdo poté, co se shodneme, že sudé funkce nemají funkce inverzní, nabídne liché funkce jako jistotu, ke které inverzní funkci najdeme. Málokdy se někomu podaří najít lichou funkci, která není prostá.

Teď už jsme objevili všechno, můžeme to přehledně shrnout.

Pro **každou prostou** funkci $y = f(x)$ můžeme sestrojit prohozením *x* a *y* inverzní funkci $y = f^{-1}(x)$.
Inverze je vzájemný vztah: funkce $y = f^{-1}(x)$ je inverzní k funkci $y = f(x)$ a funkce $y = f(x)$ je inverzní k funkci $y = f^{-1}(x)$.
Platí: $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$.
Grafy navzájem inverzních funkcí jsou souměrné podle přímky $y = x$.
Předpis inverzní funkce získáme prohozením *x* a *y* v předpisu původní funkce a úpravou na tvar $y =$.

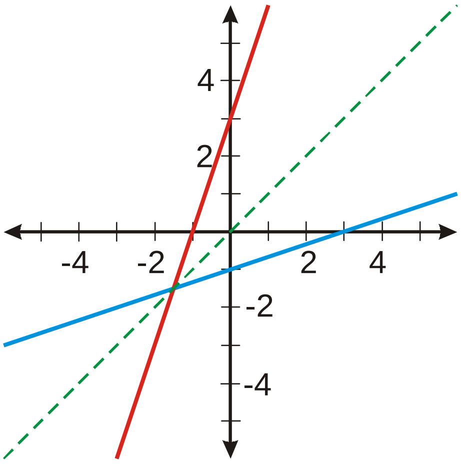
Př. 8: Najdi inverzní funkci k funkci $y=\frac{x}{3}-1$. Do jednoho obrázku sestroj její graf i graf funkce $y=\frac{x}{3}-1$, najdi $D(f)$ a $H(f)$ pro obě funkce a zkontroluj, zda platí vztahy pro obory inverzních funkcí.

Hledáme předpis inverzní funkce:

Prohodíme *x* a *y*: $y=\frac{x}{3}-1 \Rightarrow x=\frac{y}{3}-1$

$x+1=\frac{y}{3}$

$y=3x+3$



Z obrázku je zřejmé, že grafy jsou souměrné podle přímky $y=x$.

Pro funkci $y=\frac{x}{3}-1$ platí: $D(f)=R$, $H(f)=R$

Pro funkci $y=3x+3$ platí: $D(f^{-1})=R$, $H(f^{-1})=R$.

Vztahy: $D(f^{-1})=H(f)$ a $H(f^{-1})=D(f)$ platí.

Pedagogická poznámka: Je nutné předchozí příklad řešit. Část studentů totiž pořádně nezaregistruje, že je možné hledat předpisy inverzních funkcí záměnou proměnných a opět ji hledají jako lineární funkci pomocí dvou bodů. Snažím se je ohlídat.

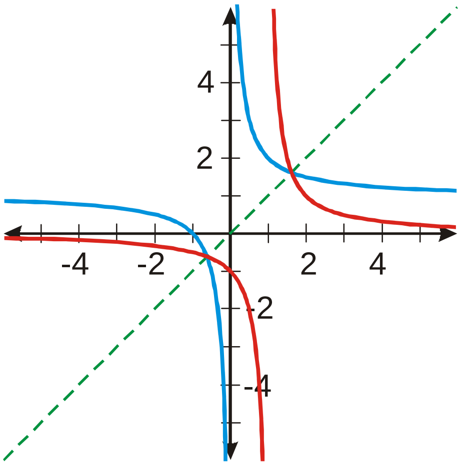
Př. 9: Najdi inverzní funkci k funkci $y=\frac{1}{x}+1$. Do jednoho obrázku sestroj její graf i graf funkce $y=\frac{1}{x}+1$, najdi $D(f)$ a $H(f)$ pro obě funkce a zkontroluj, zda platí vztahy pro obory inverzních funkcí.

Hledáme předpis inverzní funkce:

Prohodíme *x* a *y*: $y=\frac{1}{x}+1 \Rightarrow x=\frac{1}{y}+1$

$x-1=\frac{1}{y}$

$y = \frac{1}{x-1}$



Z obrázku je zřejmé, že grafy jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Pro funkci $y = \frac{1}{x} + 1$ platí: $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{1\}$

Pro funkci $y = \frac{1}{x-1}$ platí: $D(f^{-1}) = R - \{1\}$, $H(f^{-1}) = R - \{0\}$.

Vztahy: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ platí.

Př. 10: Petáková:
strana 33/cvičení 89 a) b) e)
strana 33/cvičení 90 a) b) d) e)

Shrnutí: Pokud je funkce prostá a prohodíme směr šipek v jejím předpisu, získáme funkci inverzní.