

2.7.6 Rovnice vyšších řádů

1. Numerická metoda separace kořenů

Hledáme řešení rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$.

Př. 1: Urči kořen rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$ s přesností na tři desetinná místa.

Pokračuje v dosazování z předchozího postupu:

$$\text{Dosadíme } -2,09 \quad (-2,09)^3 - 2 \cdot (-2,09) + 5 = 0,0508 \Rightarrow (-2,1; -2,09).$$

$$\text{Dosadíme } -2,095 \quad (-2,095)^3 - 2 \cdot (-2,095) + 5 = -0,005 \Rightarrow (-2,095; -2,090).$$

$$\text{Dosadíme } -2,094 \quad (-2,094)^3 - 2 \cdot (-2,094) + 5 = 0,0061 \Rightarrow (-2,095; -2,094).$$

Př. 2: Najdi pomocí metody separace kořenů, alespoň jeden kořen rovnice $2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$ s přesností na jedno desetinné místo.

$$x = 0 \quad 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 60 = 60 \Rightarrow \text{v intervalu } (0; \infty) \text{ není žádný nebo dva kořeny.}$$

$$x = -3 \quad 2 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 - 14 \cdot (-3) + 60 = -33 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; 0).$$

$$x = -2 \quad 2 \cdot (-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2 - 14 \cdot (-2) + 60 = 36 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; -2).$$

$$x = -2,5 \quad 2 \cdot (-2,5)^3 - 9 \cdot (-2,5)^2 - 14 \cdot (-2,5) + 60 = 7,5 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; -2,5).$$

$$x = -2,6 \quad 2 \cdot (-2,6)^3 - 9 \cdot (-2,6)^2 - 14 \cdot (-2,6) + 60 = 0,408 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; -2,6).$$

$$x = -2,65 \quad 2 \cdot (-2,65)^3 - 9 \cdot (-2,65)^2 - 14 \cdot (-2,65) + 60 = -3,3.. \Rightarrow (-2,65; -2,6) \Rightarrow \text{zaokrouhleno na jedno desetinné místo má hledaný kořen hodnotu } x = -2,6.$$

$$x = 3 \quad 2 \cdot (3)^3 - 9 \cdot (3)^2 - 14 \cdot (3) + 60 = -9 \text{ další dva kořeny:}$$

v intervalu $(0; 3)$ - přesná hodnota 2,5, v intervalu $(3; \infty)$ - přibližná hodnota 4,6.

$$K = \{-2,605551275; 2,5; 4,605551275\}.$$

2. Metoda snížení stupně uhádnutím kořene (kořenů)

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$.

$$\text{Hádáme kořen: } x_1 = -2: x^3 + 3x^2 + x - 2 = (-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) - 2 = -8 + 12 - 2 - 2 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x + 2)(x^2 + px + q) = x^3 + px^2 + qx + 2x^2 + 2px + 2q$$

$$3 = p + 2 \qquad 1 = q + 2p \qquad -2 = 2q$$

$$1 = p \qquad -1 = q \qquad -1 = q$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x + 2)(x^2 + x - 1). \quad x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \qquad K = \left\{ -2; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$.

$$\text{Hádáme kořen: } x_1 = 1: 6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 6 - 7 - 1 + 2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
& (6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (x-1) = 6x^2 - x - 2 \\
& -(6x^3 - 6x^2) \\
& \quad -x^2 - x + 2 \\
& \quad -(-x^2 + x) \\
& \quad \quad -2x + 2 \\
& \quad \quad -(-2x + 2) \\
& \quad \quad \quad 0
\end{aligned}$$

$$(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = (x-1)(6x^2 - x - 2) \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3} \qquad x_3 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2} \qquad K = \left\{ 1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

Hádáme kořen: $x_1 = -1$.

$$\begin{aligned}
x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 &= (x+1)(x-1)(x^2 + px + q) = (x^2 - 1)(x^2 + px + q) \\
&= x^4 + px^3 + qx^2 - x^2 - px - q \\
-6 &= p & 8 &= q - 1 & 6 &= -p & -9 &= -q \\
-6 &= p & 9 &= q & -6 &= p & 9 &= q
\end{aligned}$$

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x+1)(x-1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

Určíme kořeny rovnice $x^2 - 6x + 9 = 0$: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow x_3 = x_4 = 3$

$$K = \{1; -1; 3\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

Hádáme kořen: $x_1 = 2$.

$$\begin{aligned}
2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 &= (x-1)(x-2)(2x^2 + px + q) = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + px + q) \\
-4 &= p - 6 & -3 &= q - 3p + 4 & 7 &= -3q + 2p & -2 &= 2q \\
2 &= p & -1 &= q & 7 &= 7 & -1 &= q
\end{aligned}$$

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x-2)(2x^2 + 2x - 1)$$

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \qquad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \qquad K = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; 1; 2 \right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$. $12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = (x-1)(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7) \Rightarrow$

Hádáme kořen: $x_2 = -1$ $(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 0) = (x+1)(12x^2 - 25x + 7)$

Určíme kořeny rovnice $x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - (4 \cdot 12 \cdot 7)}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{289}}{24} = \frac{25 \pm 17}{24}$

$$x_3 = \frac{25+17}{24} = 1\frac{3}{4} \qquad x_4 = \frac{25-17}{24} = \frac{1}{3} \qquad K = \left\{ 1; -1; 1\frac{3}{4}; \frac{1}{3} \right\}$$