

2.7.6 Rovnice vyšších řádů

Předpoklady: 2507, 2705

Pedagogická poznámka: Pokud mám jenom trochu čas probírám látku této hodiny ve dvou vyučovacích hodinách. V první probíráme separaci kořenů, v druhé pak snížení stupně.

Přehled rovnic:

Řád rovnice	Tvar	Název	způsob řešení (vzorec)
1	$ax + b = 0$	lineární	$a \neq 0, x = -\frac{b}{a}$
2	$ax^2 + bx + c = 0$	kvadratická	$a \neq 0, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$	kubická	Cardanovy vzorce
4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$		Cardanovy vzorce
5 a vyšší	$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$		neexistuje

Cardanovy vzorce jsou velice složité, proto je nebudeme pro rovnice třetího a vyšších řádů používat a zkusíme jiné metody.

1. Numerická metoda separace kořenů

S počítačem jednoduché, s kalkulačkou snesitelné, s papírem smrt, ale jde u všech algebraických rovnic. Výsledek je pouze přibližný (ale snadno ho zjistíme na libovolný počet desetinných míst).

Hledáme řešení rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$.

Hodnoty levé strany nám přiblíží funkce $y = x^3 - 2x + 5$. Jak vypadá?

- Pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny x).
- Pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny x).

⇒ Graf funkce musí projít přes osu x . Hodnota x , kde k tomu dojde, je řešením rovnice.

Hledáme toto místo dosazováním:

Dosadíme 0: $0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$ ⇒ kořen je záporné číslo.

Dosadíme -3: $(-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 5 = -16$ ⇒ kořen je v intervalu $(-3; 0)$.

Dosadíme -2: $(-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 5 = 1$ ⇒ kořen je v intervalu $(-3; -2)$.

Dosadíme -2,5: $(-2,5)^3 - 2 \cdot (-2,5) + 5 = -5,625$ ⇒ kořen je v intervalu $(-2,5; -2)$.

Dosadíme -2,1: $(-2,1)^3 - 2 \cdot (-2,1) + 5 = -0,061$ ⇒ kořen je v intervalu $(-2,1; -2,0)$.

A tak bychom dosazovali dál, dokud bychom nezjistili kořen s dostatečnou přesností.

Pedagogická poznámka: Při výkladu mám na tabuli nakreslenou soustavu souřadnic a postupně do ní dokresluji křížky s aktuálně spočítanou hodnotou. Tak je nejlépe

vidět, ve kterém intervalu se kořen rovnice nachází. Už od dosazování -3 diskutujeme se studenty, které číslo je nejnvýhodnější vyzkoušet.

Př. 1: Urči kořen rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$ s přesností na tři desetinná místa.

Pokračujeme v dosazování z předchozího postupu:

Dosadíme $-2,09$ $(-2,09)^3 - 2 \cdot (-2,09) + 5 = 0,0508 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,1; -2,09)$.

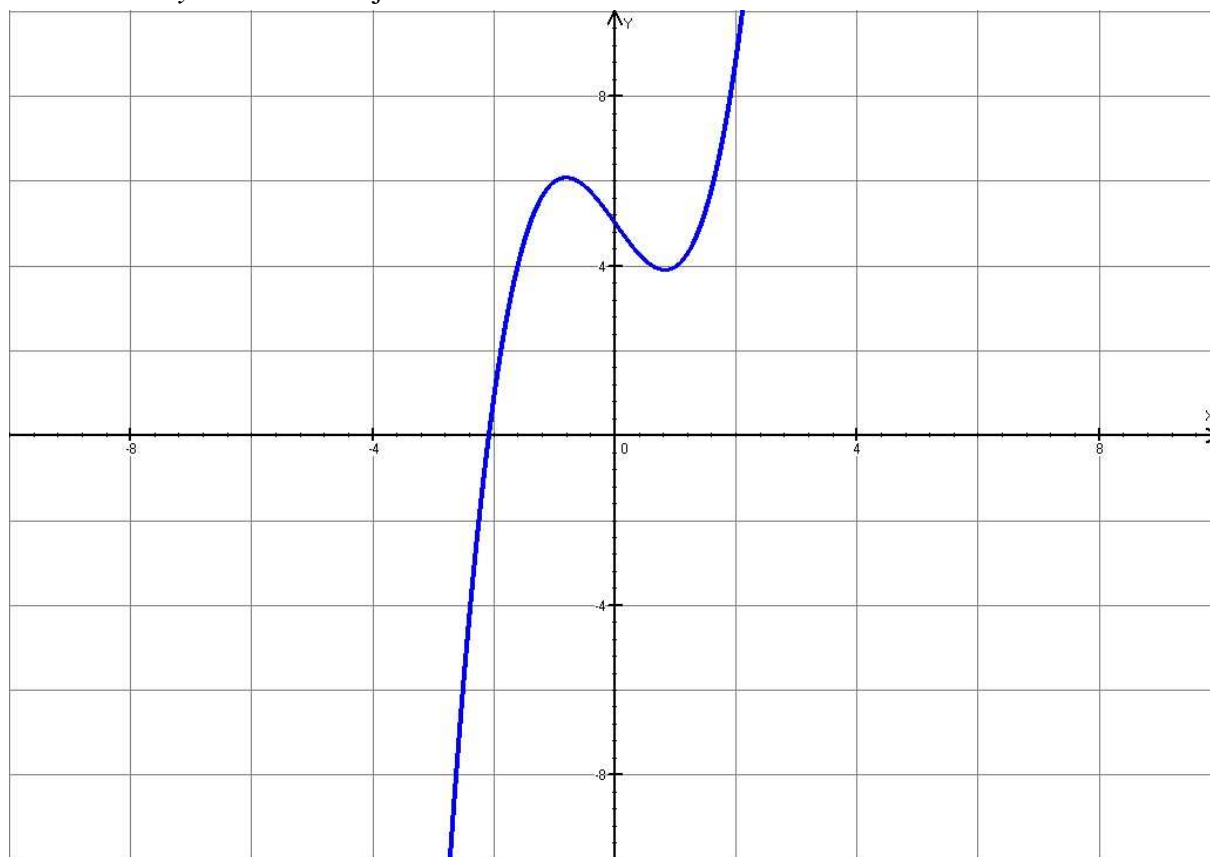
Dosadíme $-2,095$ $(-2,095)^3 - 2 \cdot (-2,095) + 5 = -0,005 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,095; -2,090)$.

Dosadíme $-2,094$ $(-2,094)^3 - 2 \cdot (-2,094) + 5 = 0,0061 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,095; -2,094) \Rightarrow$ určili jsme kořen s přesností na tři desetinná čísla.

Pedagogická poznámka: Můžete vyhlásit soutěž o odhalení kořenu na minimální počet dosazení. Při kontrole pak dávám pozor nejen na pochopení základního algoritmu, ale i na logickou volbu čísel na dosazování.

Správná hodnota na 8 desetinných míst je $K = \{-2,094551482\}$.

Graf funkce $y = x^3 - 2x + 5$ je na obrázku.



Př. 2: Najdi pomocí metody separace kořenů, alespoň jeden kořen rovnice $2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$ s přesností na jedno desetinné místo.

Rovnice má určitě alespoň jeden kořen (funkce $y = 2x^3 - 9x^2 - 14x + 60$ je pro velká kladná x kladná pro velká záporná x záporná \Rightarrow musí projít přes nulu).

Spočítáme hodnoty pro několik jednoduchých čísel:

$$x = 0$$

$$2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 60 = 60 \Rightarrow \text{v intervalu } (0; \infty) \text{ není žádný kořen nebo jsou dva kořeny.}$$

$$x = -3$$

$$2 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 - 14 \cdot (-3) + 60 = -33 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; 0) \text{ je alespoň jeden kořen.}$$

$$x = -2$$

$$2 \cdot (-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2 - 14 \cdot (-2) + 60 = 36 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; -2) \text{ je alespoň jeden kořen.}$$

$$x = -2,5$$

$$2 \cdot (-2,5)^3 - 9 \cdot (-2,5)^2 - 14 \cdot (-2,5) + 60 = 7,5 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; -2,5) \text{ je alespoň jeden kořen.}$$

$$x = -2,6$$

$$2 \cdot (-2,6)^3 - 9 \cdot (-2,6)^2 - 14 \cdot (-2,6) + 60 = 0,408 \Rightarrow \text{v intervalu } (-3; -2,6) \text{ je alespoň jeden kořen.}$$

$$x = -2,65$$

$$2 \cdot (-2,65)^3 - 9 \cdot (-2,65)^2 - 14 \cdot (-2,65) + 60 = -3,3.. \Rightarrow \text{kořen je v intervalu } (-2,65; -2,6) \\ \Rightarrow \text{zaokrouhloveno na jedno desetinné místo má hledaný kořen hodnotu } x = -2,6.$$

$$x = 3$$

$$2 \cdot (3)^3 - 9 \cdot (3)^2 - 14 \cdot (3) + 60 = -9 \Rightarrow \text{rovnice má ještě dva kořeny:}$$

- v intervalu $(0; 3)$ - přesná hodnota 2,5,
- v intervalu $(3; \infty)$ - přibližná hodnota 4,6.

S přesností na deset desetinných míst můžeme napsat

$$K = \{-2,605551275; 2,5; 4,605551275\}.$$

2. Metoda snížení stupně uhádnutím kořene (kořenů)

U kvadratických rovnic:

Když rozložíme rovnici na součin, najdeme kořeny:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1.$$

Opačně, když najdeme kořeny, můžeme trojčlen rozložit na součin.

$$\text{Máme rovnici: } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Zkusíme uhádnout dosazováním jeden z kořenů a využít ho na rozklad \Rightarrow druhá část rozkladu bude už pouze kvadratická a půjde řešit vzorcem.

Hledáme kořen: zkusíme čísla, která se snadno dosazují - 0,1,-1,2,-2 atd. (většinou nemá smysl zkoušet za 3 a -3).

$$\text{Snadno uhádneme, že jeden z kořenů je 1: } 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

$$\text{Musí platit: } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - x_1)(x^2 + px + q) = (x - 1)(x^2 + px + q).$$

Problém: Neznáme druhý člen v rozkladu. Jak určit čísla p a q ?

a) vydělením

Upravíme rovnost: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 + px + q) \quad /: (x-1)$

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = (x^2 + px + q)$$

Vydělíme: $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - x^2) \\ -5x^2 + 11x - 6 \\ -(-5x^2 + 5x) \\ 6x - 6 \\ -(6x - 6) \end{array}$$

0 (když nevyjde zbytek 0, pak jsme špatně dělili nebo hádali kořen)

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow K = \{1, 2, 3\}$$

b) zpětným násobením

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + px + q) = 0$$

Jde o dvě shodné rovnice, když součin v druhé rovnici roznásobíme, musí se rovnat.

$$(x-1)(x^2 + px + q) = x^3 + px^2 + qx - x^2 - px - q = x^3 + x^2(p-1) + x(q-p) - q = 0$$

Ted' napíšeme rovnice pod sebe a srovnáme je:

$$x^3 \quad -6x^2 \quad +11x \quad -6 = 0$$

$$x^3 + x^2(p-1) + x(q-p) - q = 0$$

Aby byly rovnice stejné musí být před stejnými mocninami x stejná čísla:

$$\begin{array}{rcl} -6 = p - 1 & 11 = q - p & -6 = -q \\ -5 = p & 11 = q - (-5) & 6 = q \\ & 6 = q & \end{array}$$

Máme 3 rovnice pro 2 neznámé \Rightarrow poslední rovnice je kontrola správnosti předchozích kroků, musí nám vyjít.

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow K = \{1, 2, 3\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů náhodně střídám obě metody. Po studentech chci, aby si obě alespoň jednou samostatně vyzkoušeli a pak mohou používat tu, která jim více vyhovuje.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = -2$.

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) - 2 = -8 + 12 - 2 - 2 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)(x^2 + px + q) = x^3 + px^2 + qx + 2x^2 + 2px + 2q$$

$$x^3 + 3x^2 + 1x - 2 = 0$$

$$x^3 + (p+2)x^2 + (q+2p)x + 2q = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 3 = p+2 & 1 = q+2p & -2 = 2q \\ 1 = p & 1 = q+2 & -1 = q \\ & -1 = q & \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)(x^2 + x - 1).$$

Určíme kořeny rovnice $x^2 + x - 1 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$K = \left\{ -2; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů se snažím, aby se studenti samostatně snažili vyrovnat s problémy, které přinášejí (6 před x^3 v příkladu 4 a x^4 v dalších příkladech). Jde o cvičení adaptace na částečně se měnící podmínky.

Př. 4: Vyřeš rovnici $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 6 - 7 - 1 + 2 = 0.$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{r} (6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (x-1) = 6x^2 - x - 2 \\ -(6x^3 - 6x^2) \\ \quad -x^2 - x + 2 \\ \quad -(-x^2 + x) \\ \quad \quad -2x + 2 \\ \quad \quad -(-2x + 2) \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = (x-1)(6x^2 - x - 2).$$

Určíme kořeny rovnice $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ 1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right\}$$

Poznámka: Pokud bychom zjišťovali rozklad zpětným násobením, musíme dát pozor: $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = (x-1)(6x^2 + px + q) = 6x^3 + px^2 + qx - 6x^2 - px - q$ a dál jako předtím.

Před x^2 v hledaném kvadratickém trojčlenu musí být 6, abychom po zpětném násobení získali $6x^3$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti sami (a to je třeba ocenit) zjistí, že 6 před x^3 může způsobit problémy a rovnici vydělí šesti. Tím vyřeší problém se šestkou, ale v rovnici se objeví zlomky, které komplikují výpočty. Řešíme potom, který ze způsobů řešení je z hlediska snadnosti výpočtu nejvýhodnější.

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 9 = 1 - 6 + 8 + 6 - 9 = 0$$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1 = -1$.

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 9 = 1 + 6 + 8 - 6 - 9 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x+1)(x-1)(x^2 + px + q) = (x^2 - 1)(x^2 + px + q)$$

$$= x^4 + px^3 + qx^2 - x^2 - px - q$$

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^4 + px^3 + (q-1)x^2 - px - q = 0$$

$$\begin{array}{cccc} -6 = p & 8 = q - 1 & 6 = -p & -9 = -q \\ & 9 = q & -6 = p & 9 = q \end{array}$$

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x+1)(x-1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

Určíme kořeny rovnice $x^2 - 6x + 9 = 0$: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow x_3 = x_4 = 3$

$$K = \{1; -1; 3\}$$

Pedagogická poznámka: Příklad je možné řešit také ve dvou krocích vždy o jeden stupeň.

V takovém případě budeme při roznásobování hledat kubický čtyřčlen

$$x^3 + px^2 + qx + r.$$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 2 - 4 - 3 + 7 - 2 = 0$$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1 = 2$.

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 32 - 32 - 12 + 14 - 2 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x-2)(2x^2 + px + q) = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + px + q)$$

$$= 2x^4 + px^3 + qx^2 - 6x^3 - 3px^2 - 3qx + 4x^2 + 2px + q =$$

$$= 2x^4 + (p-6)x^3 + (q-3p+4)x^2 + (-3q+2p)x + q$$

$$2x^4 \quad -4x^3 \quad -3x^2 \quad +7x - 2 = 0$$

$$2x^4 + (p-6)x^3 + (q-3p+4)x^2 + (-3q+2p)x + q = 0$$

$$\begin{array}{rcll} -4 = p-6 & -3 = q-3p+4 & 7 = -3q+2p & -2 = 2q \\ 2 = p & -3 = q-3 \cdot 2 + 4 & 7 = -3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & -1 = q \\ & -1 = q & 7 = 7 & \end{array}$$

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x-2)(2x^2 + 2x - 1)$$

Určíme kořeny rovnice $2x^2 + 2x - 1 = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; 1; 2 \right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = 12 \cdot 1^4 - 25 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1 - 7 = 12 - 25 - 5 + 25 - 7 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{r} (12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7) : (x-1) = 12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 \\ -(12x^4 - 12x^3) \\ \quad -13x^3 - 5x^2 + 25x - 7 \\ \quad -(-13x^3 + 13x^2) \\ \quad \quad -18x^2 + 25x - 7 \\ \quad \quad -(-18x^2 + 18x) \\ \quad \quad \quad 7x - 7 \\ \quad \quad \quad -(7x - 7) \\ \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = (x-1)(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7) \Rightarrow$$

Řešíme rovnici: $12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 0$.

Hádáme kořen: $x_2 = -1$.

$$12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 12 \cdot (-1)^3 - 13 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot (-1) + 7 = -12 - 13 + 18 + 7 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{r}
(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7) : (x + 1) = 12x^2 - 25x + 7 \\
-(12x^3 + 12x^2) \\
\hline
-25x^2 - 18x + 7 \\
-(-25x^2 - 25x) \\
\hline
7x + 7 \\
-(7x + 7) \\
\hline
0
\end{array}$$

$$(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 0) = (x + 1)(12x^2 - 25x + 7)$$

Určíme kořeny rovnice $12x^2 - 25x + 7 = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - (4 \cdot 12 \cdot 7)}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{289}}{24} = \frac{25 \pm 17}{24}$$

$$x_3 = \frac{25 + 17}{24} = 1\frac{3}{4} \qquad x_4 = \frac{25 - 17}{24} = \frac{1}{3}$$

$$K = \left\{ 1; -1; 1\frac{3}{4}; \frac{1}{3} \right\}$$

Shrnutí: Rovnice třetího nebo vyššího řádu už neřešíme pomocí vzorců.