

2.7.5 Racionální a polynomické funkce

Předpoklady: 2704

Pedagogická poznámka: Při opisování definic racionální a polynomické funkce si někteří studenti stěžovali, že je to příliš těžké. Ve skutečnosti je systém, kterým jsou funkce popisovány, velmi jednoduchý a kromě toho, že přepsání chvíli trvá, na tom není nic těžkého.

Proto ukazují obě definice studentům pouze na kratší dobu (1 minuta) s tím, že je pak schovám a studenti je budou muset dopsat sami z paměti. Minutu, kterou budou mít k dispozici, by tedy měli využít na pochopení systému, kterým jsou definice napsány, protože opsat obě definice nestihnou.

Po splnění úkolu pak následuje debata o tom, jaký systém je, proč jsou indexy ve jmenovateli napsány pomocí jiného písmene než v čitateli apod.

Některé druhy funkcí se dají řadit do skupin. Mezi takové skupiny patří skupiny funkcí racionálních a polynomických.

Polynomická funkce je každá funkce ve tvaru $y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde x je proměnná a čísla $a_m; a_{m-1}; \dots; a_1; a_0$ jsou reálná a m je číslo přirozené.

Racionální funkce je každá funkce ve tvaru $y = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$, kde x je proměnná a čísla $a_m; a_{m-1}; \dots; a_1; a_0; b_n; b_{n-1}; \dots; b_1; b_0$ jsou reálná a m, n jsou čísla přirozená.

Pedagogická poznámka: Během opisování definic se ukáže, zda si studenti alespoň přibližně pamatují systém pro popisování polynomů z prvního ročníku. Pokud se vůbec neorientují, je třeba se k tomu vrátit (hodina 1704) a obětovat kreslení funkcí.

Př. 1: Rozhodni, jaký je definiční obor polynomických a racionálních funkcí.

Definiční obor: Všechna x , která můžeme dosadit do předpisu funkce.

- **Polynomické funkce:** Předpis je sestaven z přirozených mocnin x . Do přirozených mocnin můžeme dosadit za x libovolné číslo \Rightarrow pro polynomickou funkci platí $D(f) = R$.
- **Racionální funkce:** Předpis je sestaven z podílu dvou polynomických funkcí. Obě funkce mají definičním obor R . Nemůžeme dělit nulou \Rightarrow definičním oborem je tedy množina všech reálných čísel, kromě takových x , pro které je hodnota polynomu ve jmenovateli rovna nule \Rightarrow pro racionální funkci platí $D(f) = R - A$, kde A je množina všech kořenů rovnice $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$.

Pedagogická poznámka: Studenti u definičního oboru racionálních funkcí tradičně navrhnou nulu. Je třeba jim ukázat, že nevadí nula dosazená za x , ale nula ve jmenovateli zlomku, což není to samé. Jinak jde o dobrou ukázkou ukvapeného uvažování.

Př. 2: Rozhodni, jaký je vztah mezi racionálními a polynomickými funkcemi (zda je jedna z množin podskupinou druhé, zda mají množiny prázdný průnik apod.).

Předpis racionální funkce je sestaven z podílu dvou polynomických funkcí. Pokud bude polynom ve jmenovateli roven 1, zbude pouze polynom v čitateli. Polynomické funkce jsou tedy podmnožinou racionálních funkcí, pro které platí $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 1$ (přesněji $b_n = b_{n-1} = \dots = b_1 = 0; b_0 = 1$).

Př. 3: Doplň následující tabulku s přehledem dosud probraných funkcí:

Název funkce	předpis	předpis podle definice polynomické a racionální funkce	patří mezi
	$y = a$		
		$y = a_1 x + a_0$	
	$y = a x - b + c$		X
kvadratická			polynomické a racionální
lineární lomená			
mocninná s přirozeným exponentem	$y = x^n, n > 0$		
		$y = \frac{1}{x^n}$	

Probrali jsme zatím tyto funkce:

Název funkce	předpis	předpis podle definice polynomické a racionální funkce	patří mezi
konstantní	$y = a$	$y = a_0$	polynomické a racionální
lineární	$y = ax + b$	$y = a_1 x + a_0$	polynomické a racionální
s absolutní hodnotou	$y = a x - b + c$	X	X
kvadratická	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	polynomické a racionální
lineární lomená	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$	$y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$	racionální
mocninná s přirozeným exponentem	$y = x^n, n > 0$	$y = x^n$	polynomické a racionální
mocninná s celým záporným exponentem	$y = x^n, n < 0$	$y = \frac{1}{x^n}$	racionální

Pedagogická poznámka: Ukazují po chvíli studentům první řádek, aby měli lepší představu o tom, co se po nich chce.

Polynomické funkce mají značný význam:

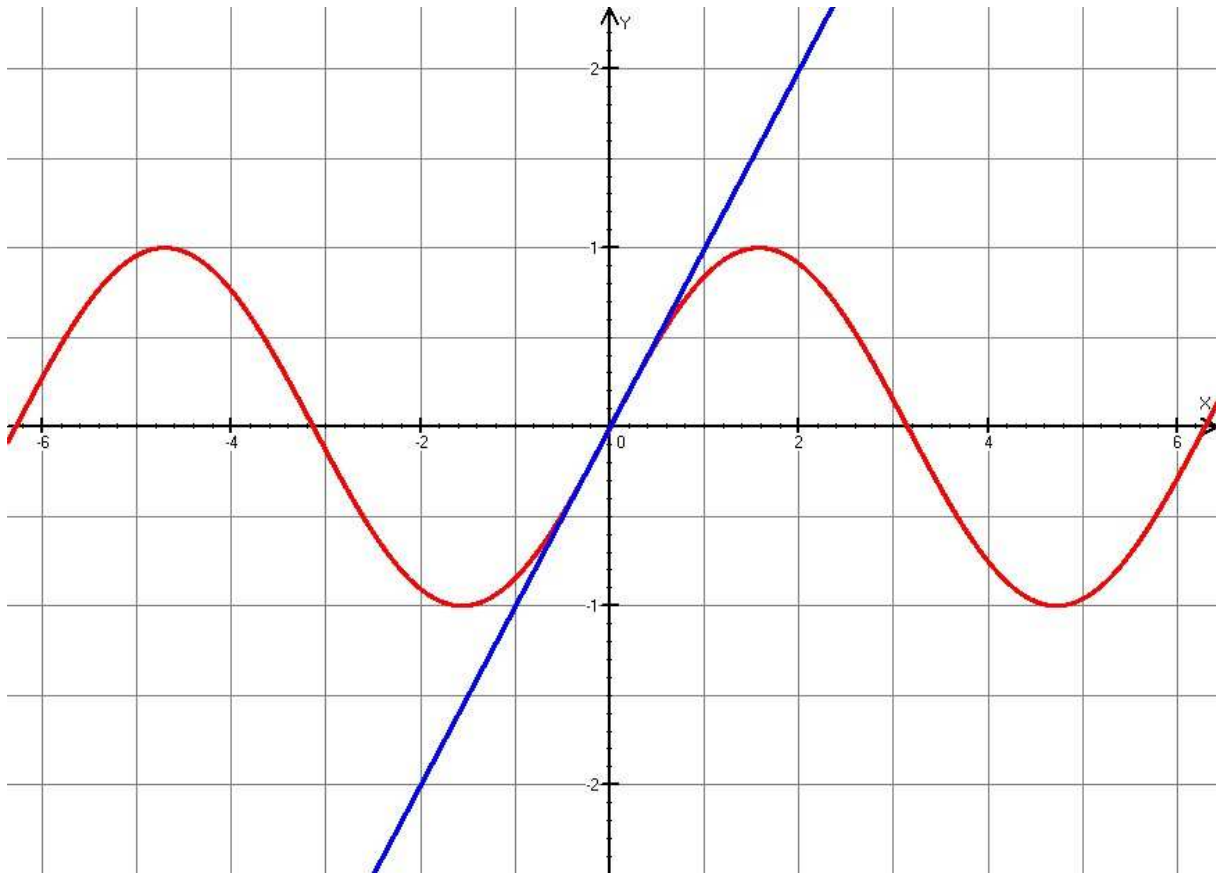
- Mají definiční obor $R \Rightarrow$ nemusíme se starat o podmínky.

- Nejsou přetržené a nemají ostré rohy (velká výhoda ve fyzice při zkoumání jejich změn).
- Jejich hodnoty se snadno se vyčíslejí.
- S jejich pomocí můžeme vyjadřovat ostatní funkce (takzvaný Taylorův rozvoj).

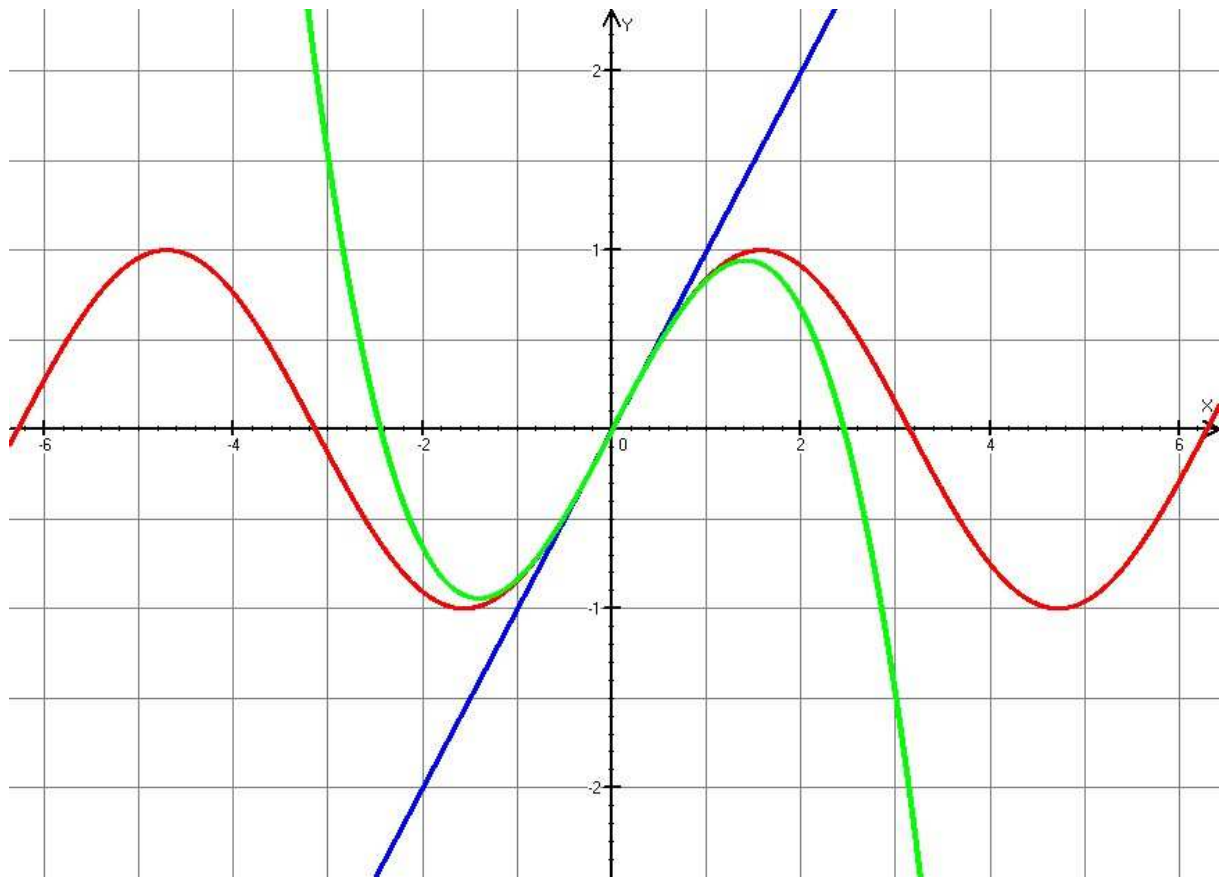
Taylorův rozvoj je řada polynomických funkcí se zvětšujícím se řádem, která se zvětšující se přesností aproximuje hodnoty jiné funkce v okolí nějakého bodu.

Příklad: aproximace funkce $\sin x$ v okolí bodu 0.

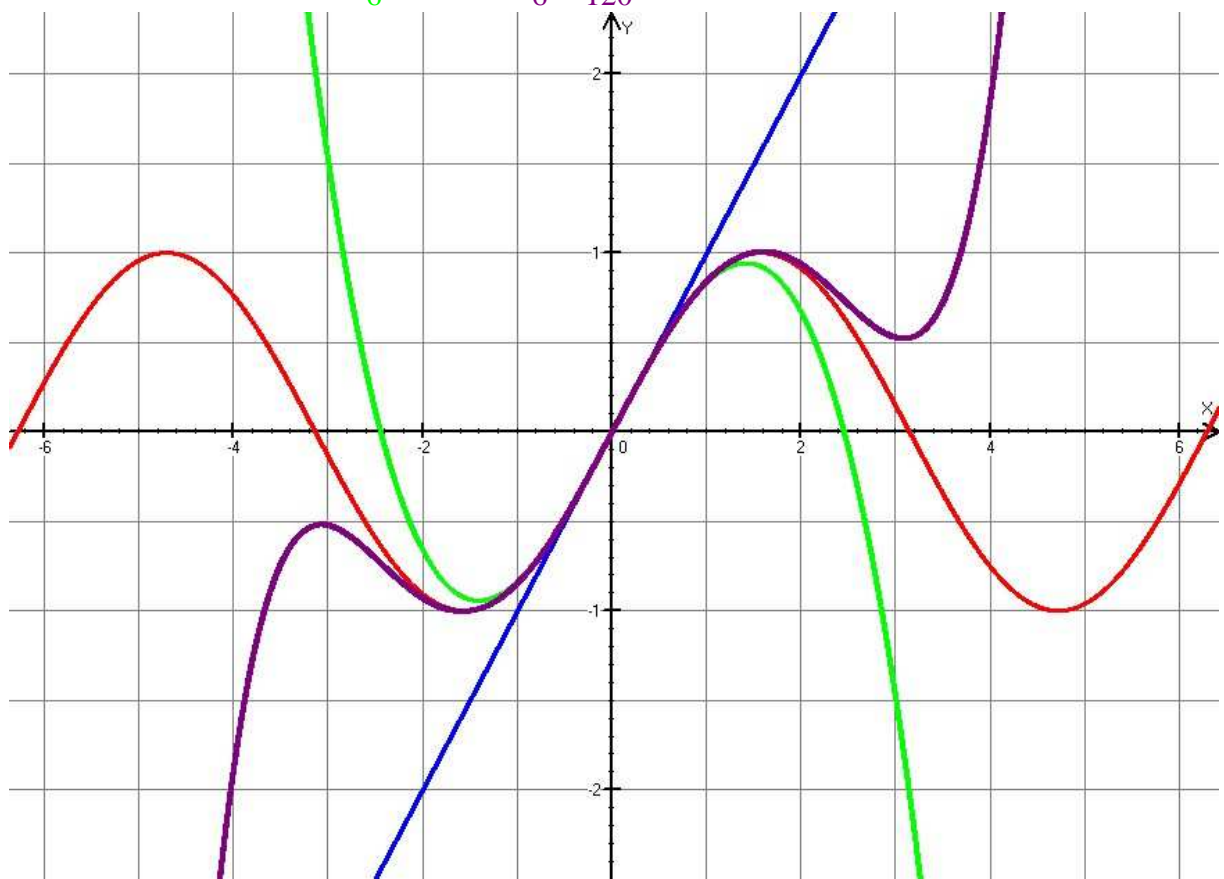
$$y = \sin x, \quad y_1 = x$$



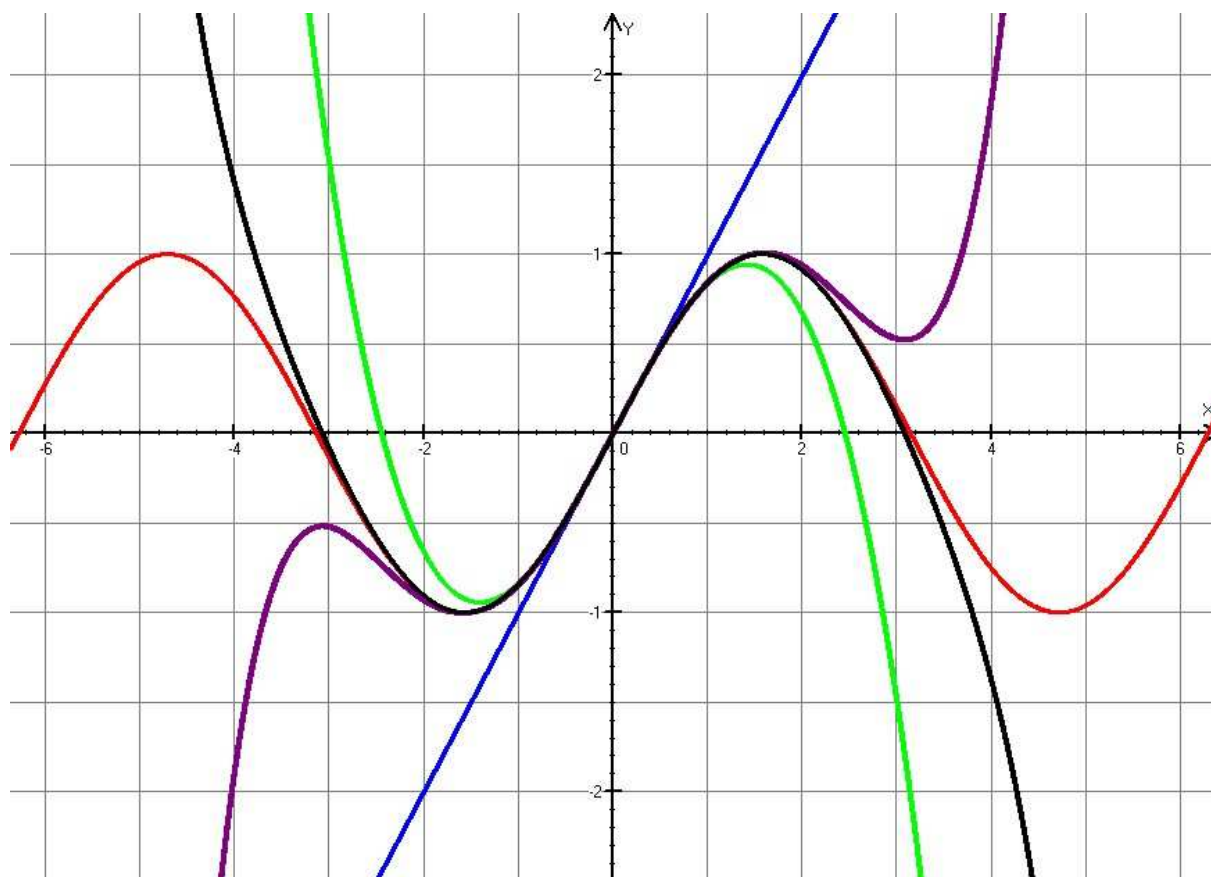
$$y = \sin x, \quad y_1 = x, \quad y_3 = x - \frac{x^3}{6}$$



$y = \sin x$, $y_1 = x$, $y_3 = x - \frac{x^3}{6}$, $y_5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$



$$y = \sin x, \quad y_1 = x, \quad y_3 = x - \frac{x^3}{6}, \quad y_5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad y_7 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$



Z obrázků je dobře vidět, jak je graf funkce $y = \sin x$ čím dál lépe aproximován pomocí vyššího Taylorova polynomu.

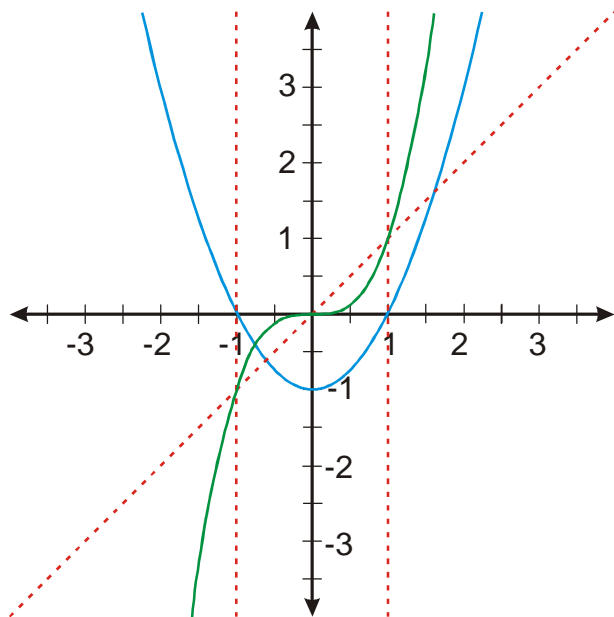
Grafy složitějších racionálních nebo polynomických funkcí nedokážeme nakreslit obecně pomocí dosavadních metod. V některých případech je možné tvar funkce přibližně odhadnout.

Pedagogická poznámka: Následující příklad studenti až na výjimky samostatně nevyřeší.

Řešíme ho tedy společně na tabuli s tím, že se snažím jim dávat co nejvíce šancí, aby se trhli a pokračovali dál sami. Jinak u obou následujících příkladů studentům připomínám, že jde o relativně náročné úlohy, které přesahují rámec toho, by se měli povinně naučit.

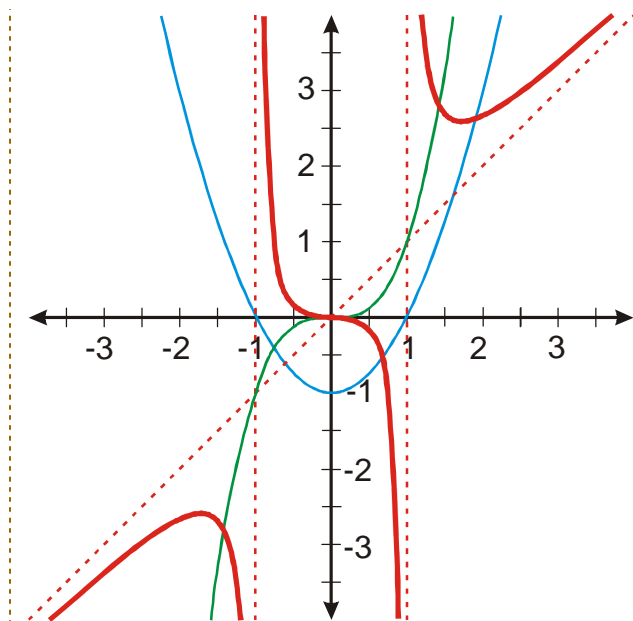
Př. 4: Nakresli přibližný tvar grafu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Do obrázku nakreslíme grafy funkcí $y = x^3$ a $y = x^2 - 1$. Hodnoty grafu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ budeme získávat dělením hodnot funkcí $y = x^3$ a $y = x^2 - 1$.

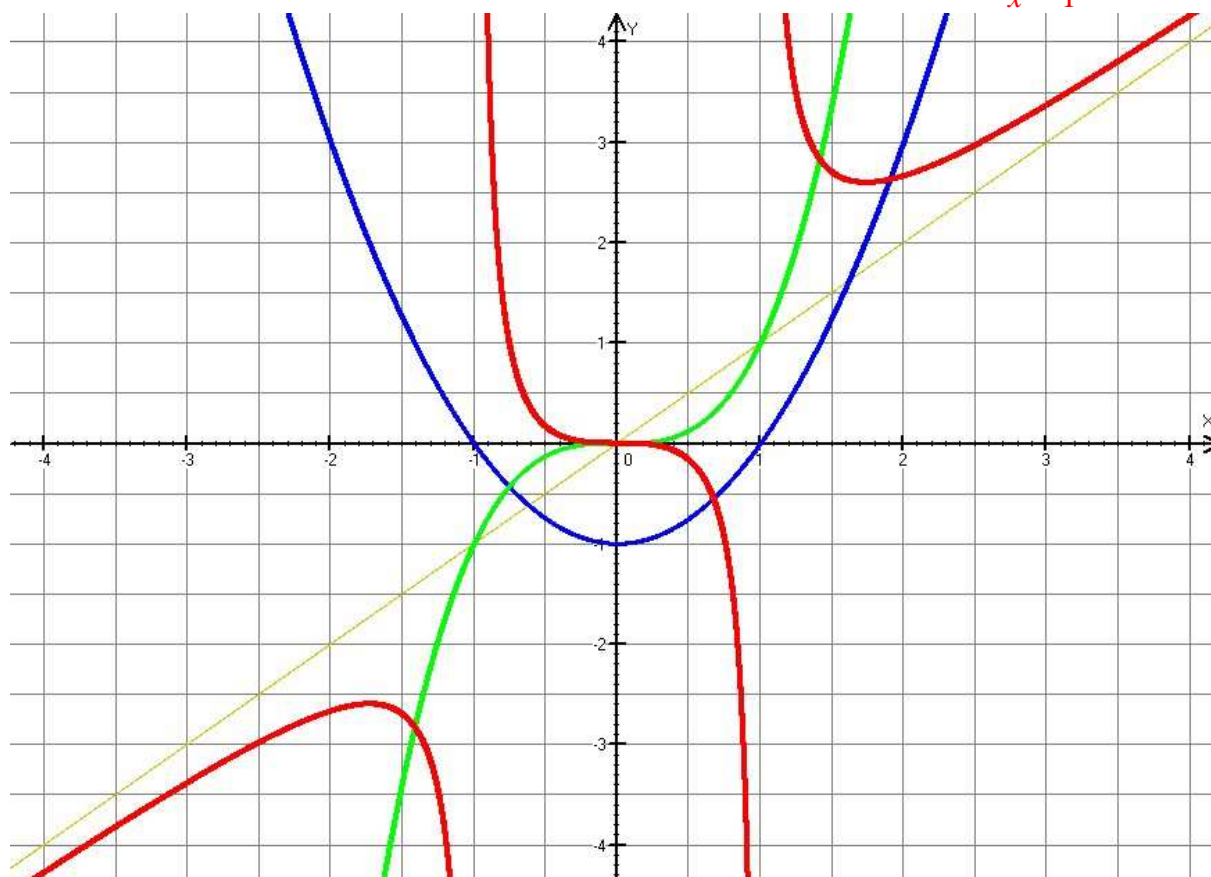


- Funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ nebude mít žádnou hodnotu pro $x = 1$ a $x = -1$ (dělili bychom nulou).
- Pro velká x je možné číslo 1 ve jmenovateli zlomku zanedbat a přibližně platí $y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \doteq \frac{x^3}{x^2} = x \Rightarrow$ funkce se bude chovat podobně jako funkce $y = x$.
- Pokud určujeme hodnoty pro x větší ale blízká 1, dělíme číslo větší než 1 číslem čím dál více se blíží 0 \Rightarrow získáme tak čím dál větší hodnoty y .
- Pomocí dvou předchozích úvah získáme hodnoty funkce i pro $x \in (-\infty; -1)$.
- Pro $x = 0$ získáme hodnotu $y = 0$.
- Když zvětšujeme hodnotu x postupně od nuly k jedničce, dělíme kladné číslo, které se zvětšuje od 0 k 1, záporným číslem, které se zvětšuje od -1 k nule \Rightarrow výsledkem dělení jsou záporná čísla se vzrůstající absolutní hodnotou.
- Když zmenšujeme hodnotu x postupně od nuly k -1, dělíme záporné číslo, které se zmenšuje od 0 k -1, záporným číslem, které se zvětšuje od -1 k nule \Rightarrow výsledkem dělení jsou zvětšující se kladná čísla.

Přibližný tvar grafu i grafů všech zmíněných funkcí je vidět na obrázku.



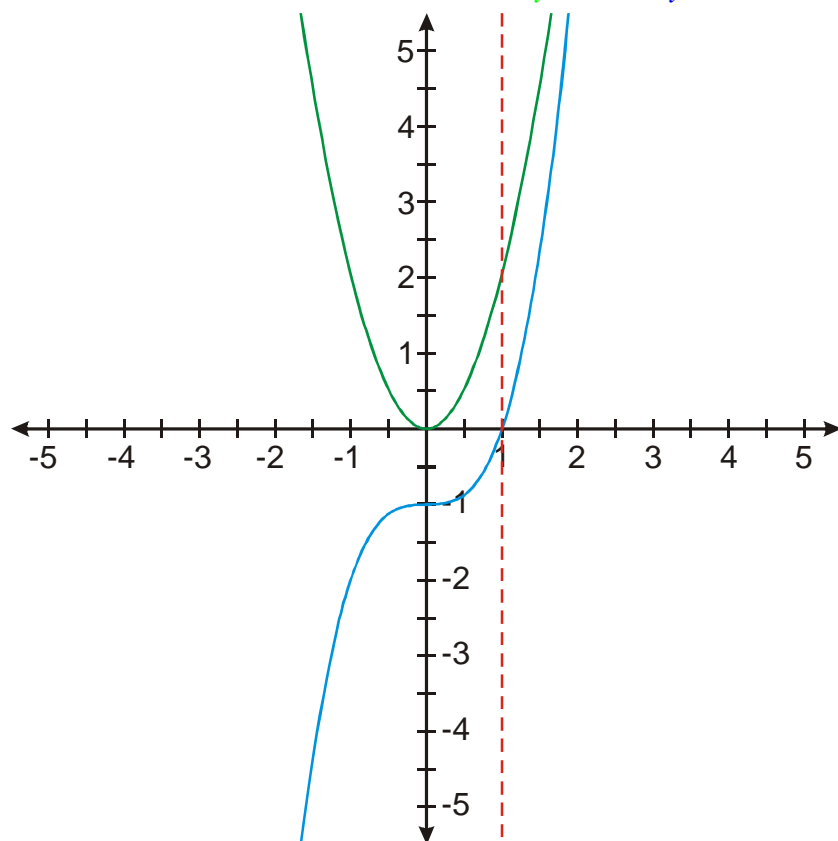
Výsledek můžeme ověřit pomocí počítače: $y_1 = x$, $y_2 = x^2 - 1$, $y_3 = x^3$, $y_4 = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.



Pedagogická poznámka: Opět spíše bonbónek pro zájemce, když jim na konci hodiny zbude čas.

Př. 5: Nakresli přibližný tvar grafu funkce $y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$.

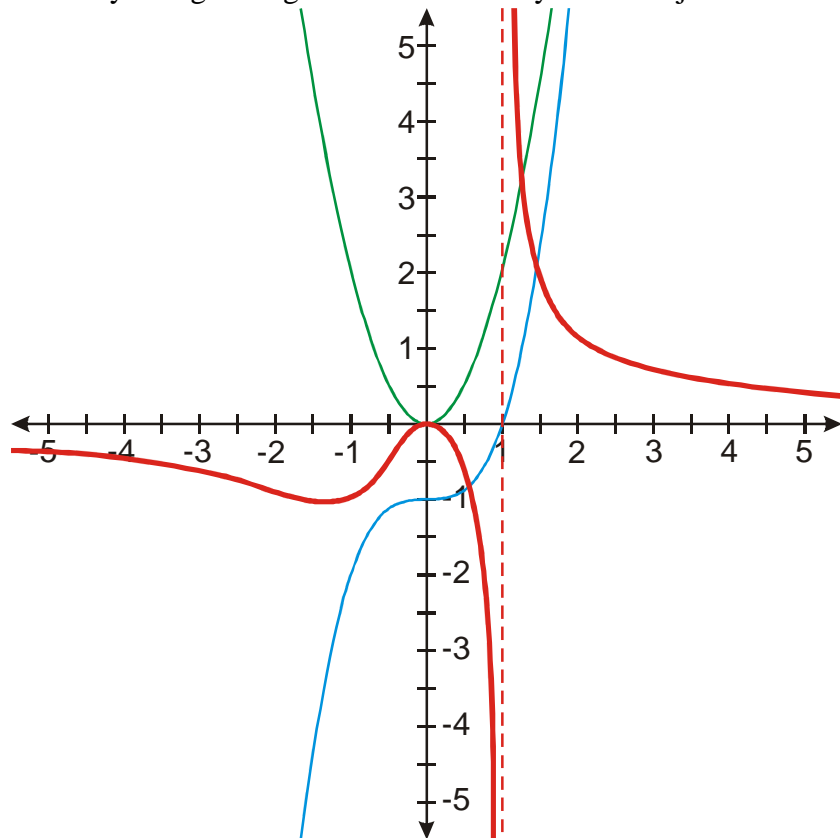
Do obrázku nakreslíme grafy funkcí $y = 2x^2$ a $y = x^3 - 1$. Hodnoty grafu funkce $y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$ budeme získávat dělením hodnot funkcí $y = 2x^2$ a $y = x^3 - 1$.



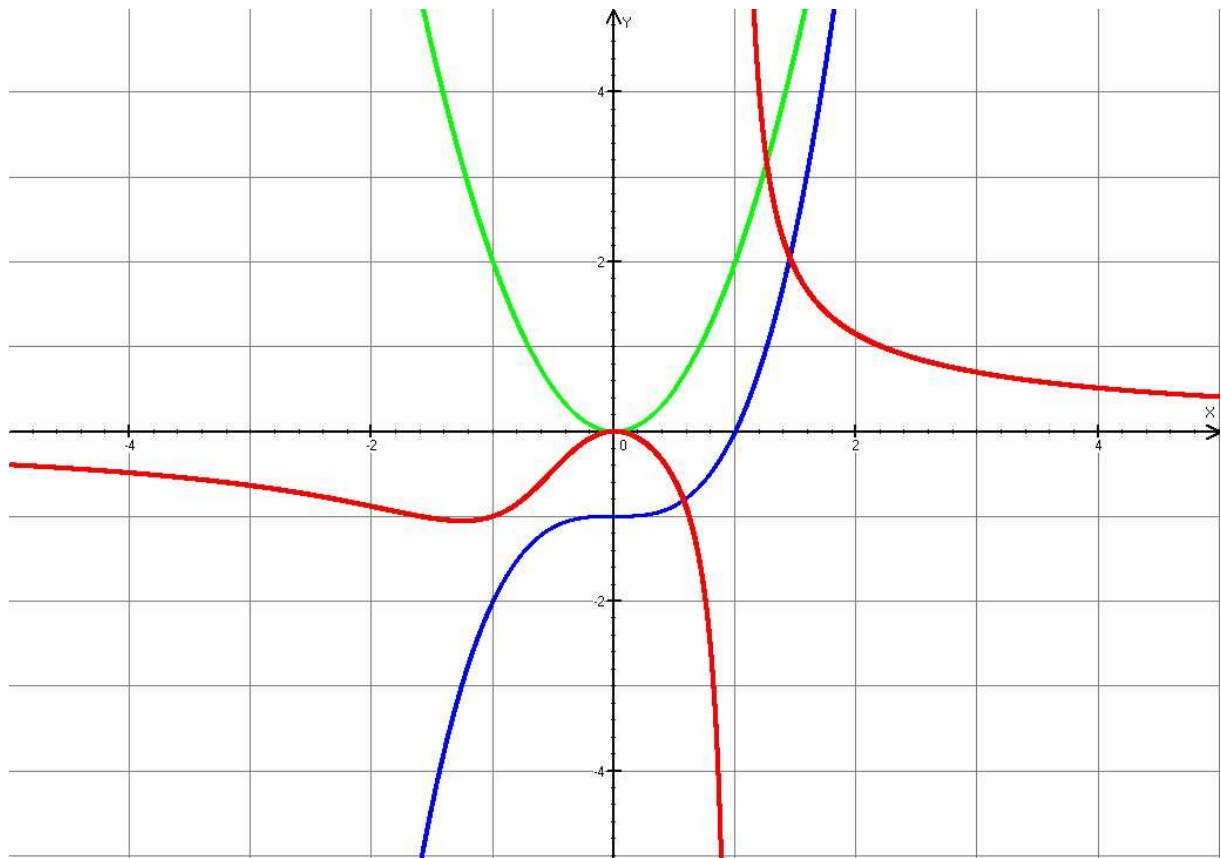
- Funkce $y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$ nebude mít žádnou hodnotu pro $x = 1$ (dělili bychom nulou).
- Pro velká x je možné číslo 1 ve jmenovateli zlomku zanedbat a přibližně platí $y = \frac{2x^2}{x^3 - 1} \doteq \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \Rightarrow$ funkce se bude chovat podobně jako funkce $y = \frac{2}{x} \Rightarrow$ pro x blízké se nekonečnu se budou hodnoty přibližovat nule, stejně tak pro x blízkí se mínus nekonečnu.
- Určujeme tvar grafu v intervalu $x \in (1; \infty)$. Pro hodnoty blízké 1 dělíme čísla větší než dvě čísla, která se blíží nule \Rightarrow získáváme velmi velká kladná čísla. Pro x blízkí se k jedničce se křivka bude blížit k plus nekonečnu, pro velká čísla se funkce chová jako funkce $y = \frac{2}{x} \Rightarrow$ hodnoty se blíží nule.
- Pro $x = 0$ dělíme 0 číslem $-2 \Rightarrow$ získáme hodnotu $y = 0$.
- Určujeme tvar grafu v intervalu $x \in (0; 1)$. Vycházíme z bodu $[0; 0]$, postupně dělíme čím dál větší kladná čísla, čím dál menšími zápornými čísly \Rightarrow získané hodnoty se postupně blíží k $-\infty$.
- Určujeme tvar grafu v intervalu $x \in (-\infty; 0)$. Vycházíme z bodu $[0; 0]$, dělíme kladné hodnoty zeleného grafu, zápornými hodnotami modrého \Rightarrow všechny hodnoty v tomto

intervalu budou záporné. Zelené hodnoty se zpočátku zvětšují rychleji než klesají modré \Rightarrow zpočátku se bude absolutní hodnota výsledků zvětšovat (graf se vzdaluje od osy x), postupně se začnou modré hodnoty zmenšovat rychleji, funkce se začne chovat jako funkce $y = \frac{2}{x}$ a začne se opět blížit k ose x .

Přibližný tvar grafu i grafů všech zmíněných funkcí je vidět na obrázku.



Výsledek můžeme ověřit pomocí počítače: $y_1 = x^3 - 1$, $y_2 = 2x^2$, $y_3 = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$.



Shrnutí: