2.7.1 Mocninné funkce s přirozeným mocnitelem

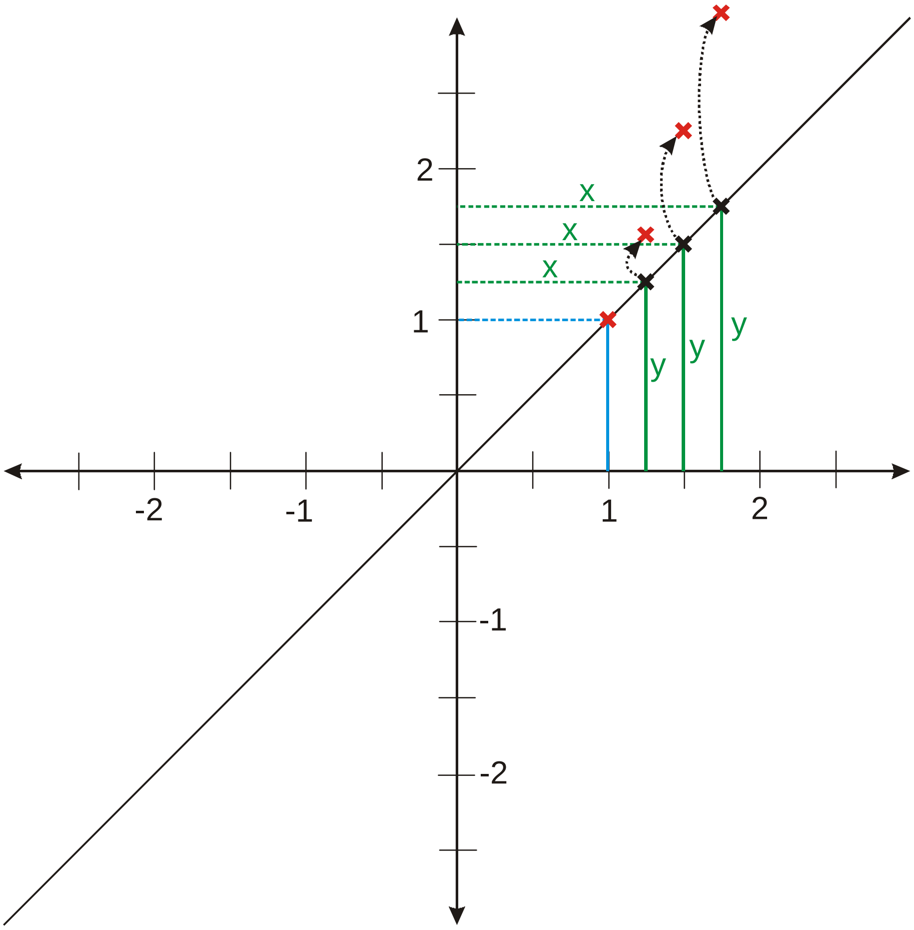
Předpoklady: 2501

Pedagogická poznámka: K následujícím třem hodinám je možné přistoupit dvěma způsoby. Já osobně doporučuji postupovat podle učebnice. V takovém případě zabere polovinu prvních dvou hodin výuka systému „násobení grafu funkce“, která sice nefiguruje nikde v osnovách, ale znatelně zlepšuje orientaci studentů v grafech obecně a skýtá i některé další možnosti, jak řešit některé příklady. Čas který tímto způsobem ztratíme pak chybí ve zbytku hodiny a je nutné většinu příkladů nechat do hodiny 2703.
Druhou možností je studentům grafy funkcí nakreslit, čímž se polovina hodiny ušetří a příklady z hodiny 2703 se proberou již v hodině 2701 (respektive 2702). Postup je rychlejší, ale ztrácí velkou část kouzla.

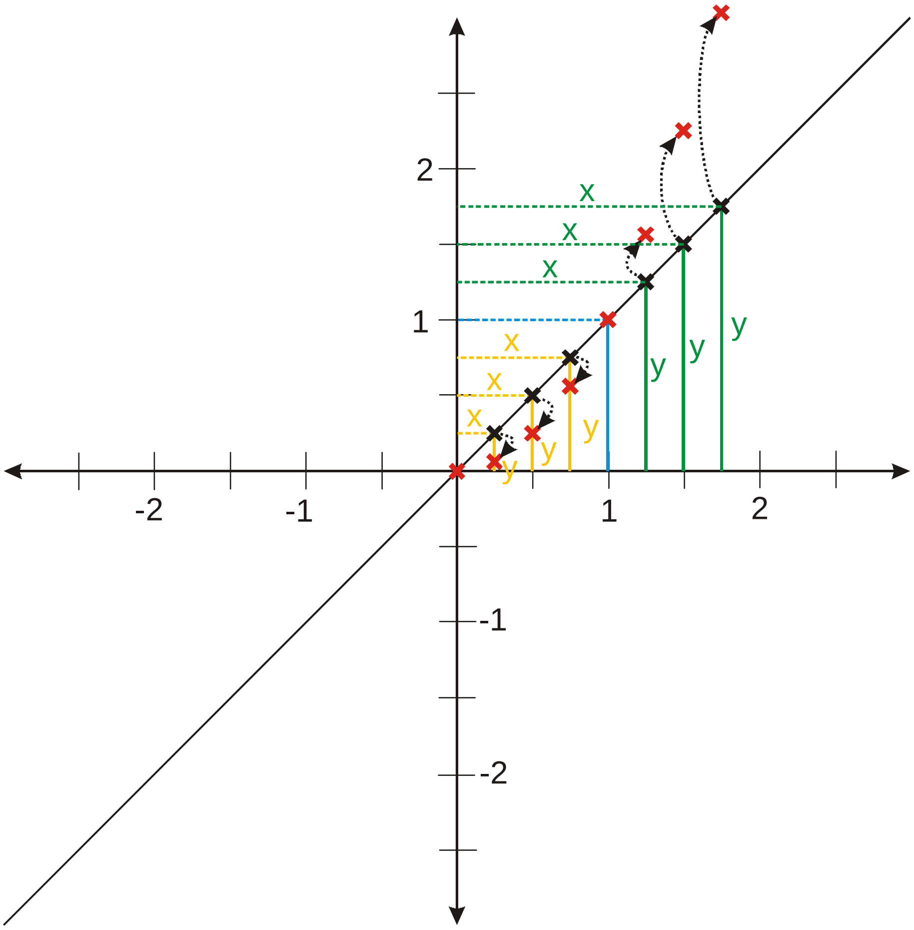
Pedagogická poznámka: „Násobení grafu“ číslem *x* nepromítám z počítače, ale ukazuji ho na tabuli. Mám připravený dynamický obrázek v Cabri, ale používám ho spíše pro potvrzení než pro výklad, který je u tabule pro studenty stravitelnější. Už při kreslení grafu funkce $y = x^2$ se snažím nechávat studentům prostor, aby zkoušeli pro intervaly $\langle 0;1 \rangle$ a $\langle -1;0 \rangle$ kreslit sami a já je mohl kontrolovat. Jinak následující postup je typickou ukázkou toho, kdy sebelepší text v učebnici a model v počítači nemůže nahradit živou práci učitele.

Další způsob jak přibližně nakreslit graf funkce $y = x^2$ tentokrát pomocí funkce $y = x$, bez pomoci tabulky.
Funkci $y = x^2$ můžeme vyjádřit pomocí funkce $y = x$ takto: $y = x^2 = x \cdot x$ - tedy hodnoty funkce $y = x$, násobíme v každém bodě ještě jednou hodnotou *x*.

- Pro $x = 1$ je hodnota $y = 1$ (svislá plná modrá čára). Násobíme hodnotou $x = 1$ (vodorovná přerušovaná modrá čára), platí $1 \cdot 1 = 1$, nová hodnota $y_n = 1$ $\Rightarrow$ pro $x = 1$ se hodnota nezmění (červený křížek o souřadnicích $[1;1]$ - první bod nového grafu)
- Další body grafu $y = x$, napravo od bodu $[1;1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná zelená čára) násobíme hodnotou $x > 1$ (vodorovná přerušovaná zelená čára). Při násobení číslem větším než jedna se hodnota zvětší (proto jsou červené křížky výš než původní černé). Čím je číslo, kterým násobíme, větší, tím víc se hodnota zvětší (červené křížky jsou čím více napravo tím výše nad původními černými).

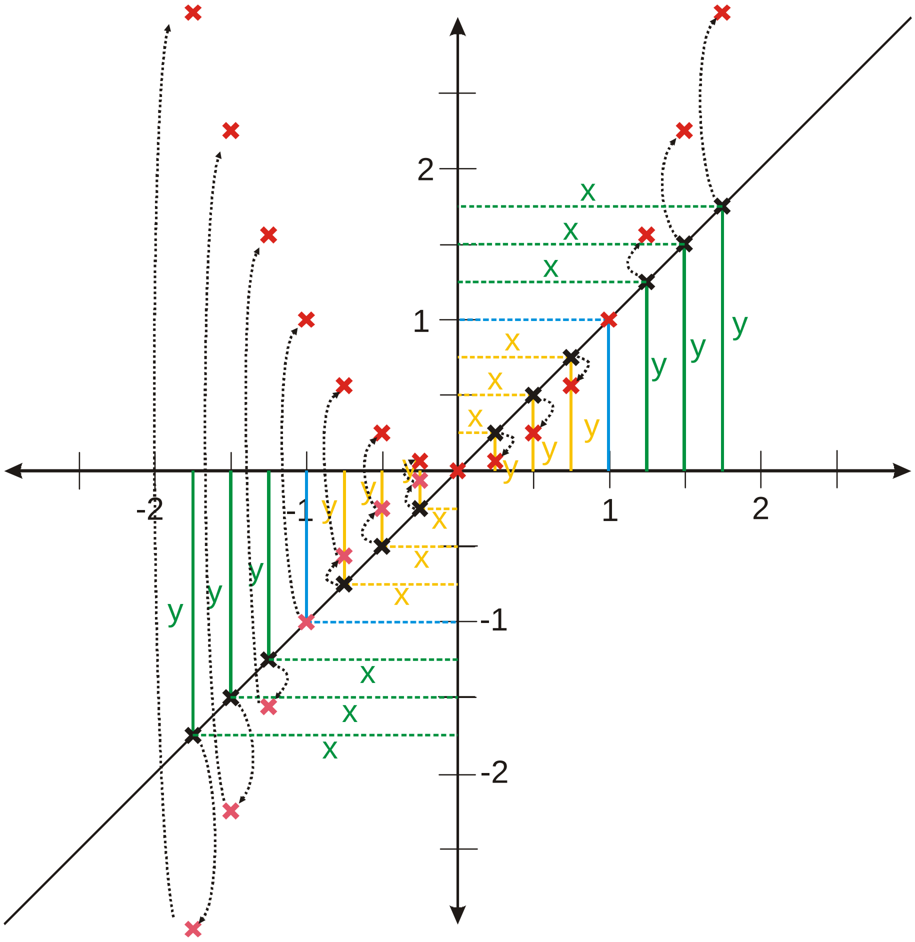


- Pokračujeme vlevo od bodu $[1;1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná žlutá čára) násobíme hodnotou $x<1$ (vodorovná přerušovaná žlutá čára). Při násobení číslem menším než jedna se hodnota zmenší (proto jsou červené křížky níž než původní černé). Čím je číslo, kterým násobíme, menší, tím víc se hodnota zmenší (červené křížky jsou čím více vlevo tím níže pod původními černými).
- V bodě $[0;0]$ násobíme nulu nulou $\Rightarrow$ i nová hodnota bude nula a bod zůstane na místě.

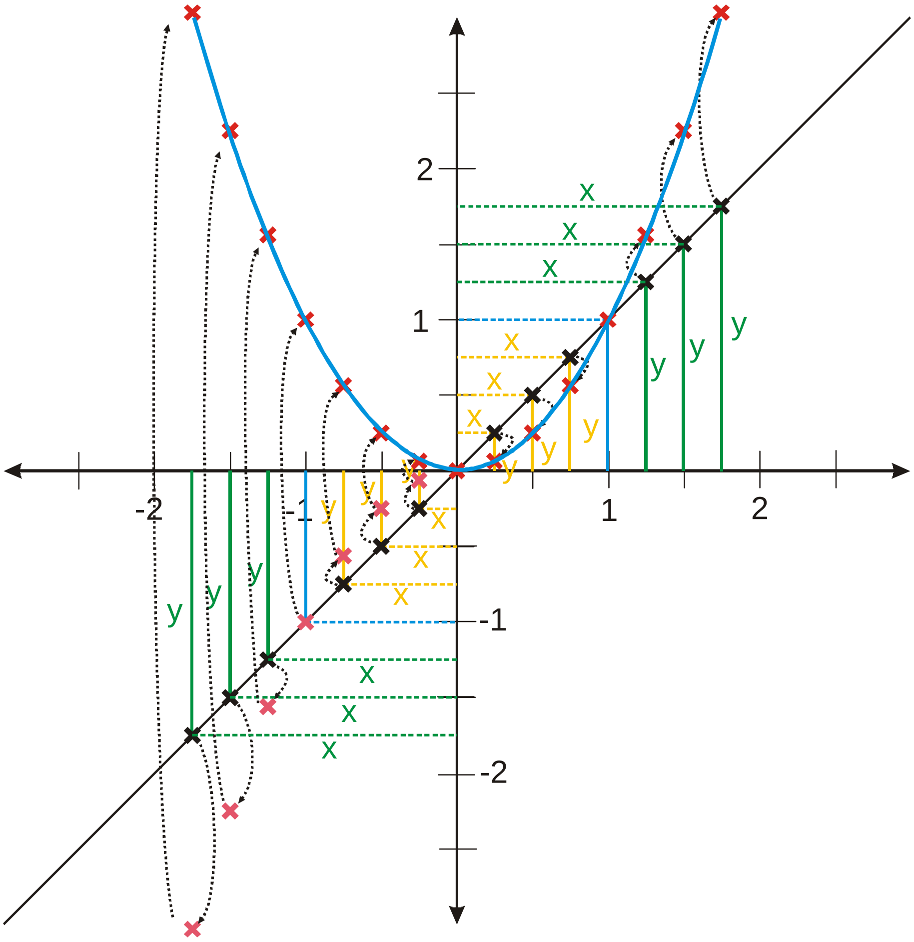


Máme první polovinu grafu hotovou.
Nyní sestrojujeme levou část grafu:

- Pro $x=-1$ je hodnota $y=-1$ (svislá plná modrá čára). Násobíme hodnotou $x=-1$ (vodorovná přerušovaná modrá čára), platí $-1\cdot(-1)=1 \Rightarrow$ nová hodnota $y_n=1$. Pro $x=-1$ se hodnota změní na opačné číslo (červený křížek o souřadnicích $[1;1]$ - první bod levé strany nového grafu).
- Body grafu $y=x$, nalevo od bodu $[-1;-1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná zelená čára) násobíme hodnotou $x<-1$ (vodorovná přerušovaná zelená čára). Při násobení číslem menším než mínus jedna se hodnota v absolutní hodnotě zvětší (proto jsou růžové křížky níž a dál od osy *x* než původní černé), ale protože jsou obě čísla v součinu záporná, výsledek má kladné znaménko, takže se překlopí nad osu *x* (červený křížek). Čím je číslo, kterým násobíme, menší (a v absolutní hodnotě větší), tím víc se hodnota v absolutní hodnotě zvětší (růžové křížky jsou čím více nalevo tím níže pod původními černými), po převrácení pak zvětší (červené jsou čím více nalevo tím výše).
- Pokračujeme vpravo od bodu $[-1;-1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná žlutá čára) násobíme hodnotou $-1<x<0$ (vodorovná přerušovaná žlutá čára). Při násobení číslem v absolutní hodnotě menším než jedna se hodnota v absolutní hodnotě zmenší (proto jsou růžové křížky výš než původní černé a blíže k ose *x*). Protože jsou obě čísla v součinu záporná, výsledek je kladný a křížek se převrátí nad osu *x*. Čím je číslo, kterým násobíme, v absolutní hodnotě menší, tím víc se hodnota v absolutní hodnotě zmenší (růžové křížky jsou čím více vpravo tím výše nad původními černými a blíže k ose *x*).



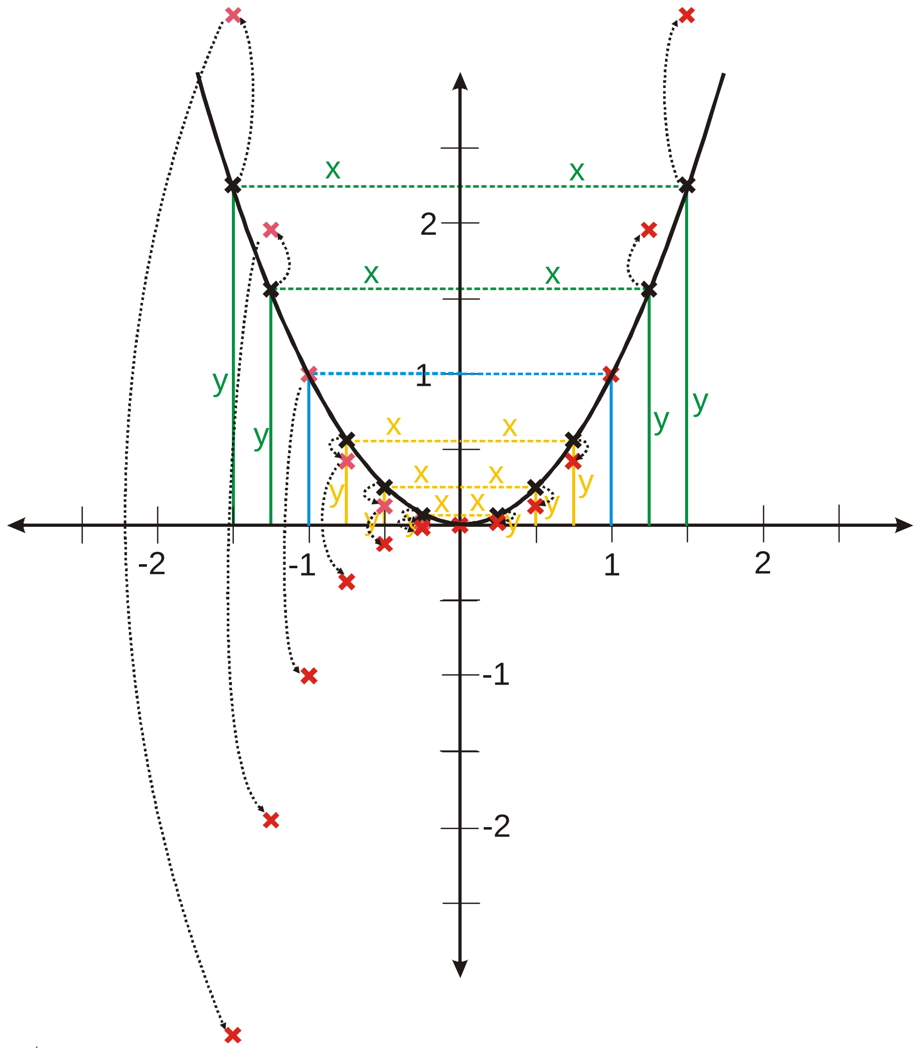
Spojením získaných bodů získám graf funkce $y = x^2$.



Pedagogická poznámka: Ačkoliv je kreslení grafu $y = x^3$ uvedeno jako příklad. Hlavně z počátku v jednotlivých intervalech po chvilce třídě pomáhám. Na konci tohoto příkladu by však už studenti měli být schopni kreslit další grafy samostatně.

Př. 1: Pomocí předchozího postupu sestroj z grafu funkce $y = x^2$ graf funkce $y = x^3$.

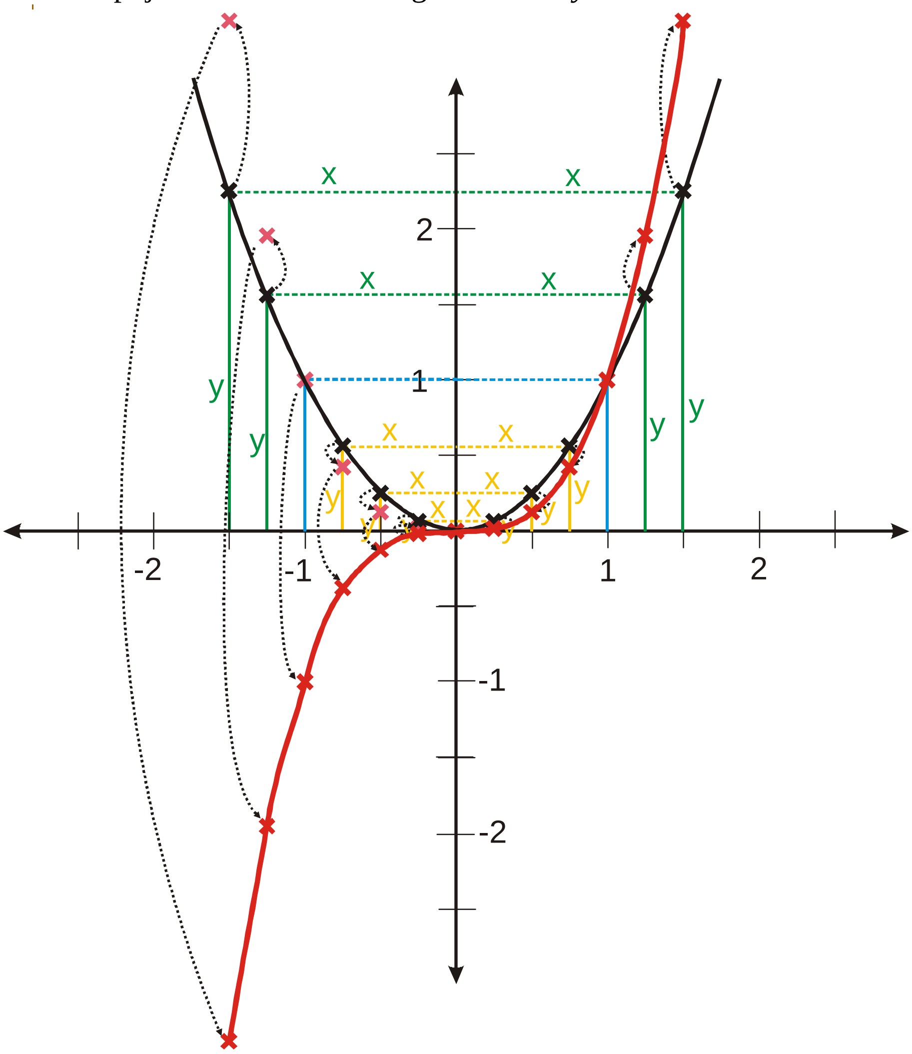
Platí $y = x^3 = x^2 \cdot x$ $\Rightarrow$ vezmeme graf funkce $y = x^2$ a všechny body budeme násobit hodnotami *x*.



- Pro $x = 1$ je hodnota $y = 1$ (svislá plná modrá čára). Násobíme hodnotou $x = 1$ (vodorovná přerušovaná modrá čára), platí $1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ nová hodnota $y_n = 1$. Pro $x = 1$ se hodnota nezmění (červený křížek o souřadnicích $[1;1]$ - první bod nového grafu).
- Další body grafu $y = x$ napravo od bodu $[1;1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná zelená čára) násobíme hodnotou $x > 1$ (vodorovná přerušovaná zelená čára). Při násobení číslem větším než jedna se hodnota zvětší (proto jsou červené křížky výš než původní černé), čím je číslo, kterým násobím větší, tím víc se hodnota zvětší (červené křížky jsou čím více napravo tím výše nad původními černými).
- Pokračujeme vlevo od bodu $[1;1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná žlutá čára), násobíme hodnotou $x < 1$ (vodorovná přerušovaná žlutá čára). Při násobení číslem menším než jedna se hodnota zmenší (proto jsou červené křížky níž než původní černé). Čím je číslo, kterým násobíme, menší, tím víc se hodnota zmenší (červené křížky jsou čím více vlevo tím níže pod původními černými).
- V bodě $[0;0]$ násobíme nulu nulou $\Rightarrow$ i nová hodnota bude nula a bod zůstane na místě.
- Pro $x = -1$ je hodnota $y = 1$ (svislá plná modrá čára). Násobíme hodnotou $x = -1$ (vodorovná přerušovaná modrá čára), platí $1 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow$ nová hodnota $y_n = -1$. Pro

$x = -1$ se hodnota změní na opačné číslo (červený křížek o souřadnicích $[-1;-1]$ - první bod levé strany nového grafu).

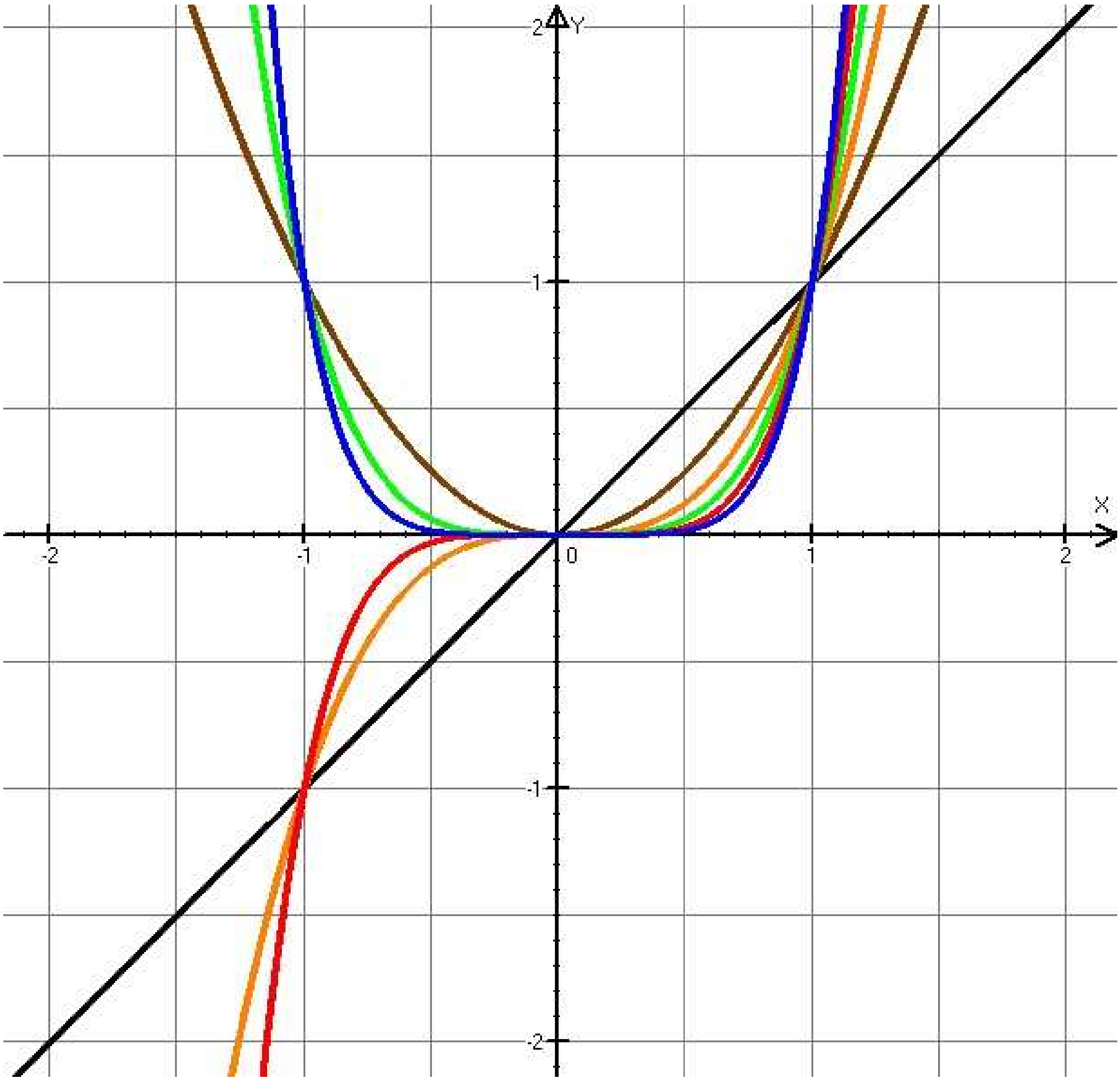
- Body grafu $y = x$ nalevo od bodu $[-1;1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná zelená čára) násobíme hodnotou $x < -1$ (vodorovná přerušovaná zelená čára). Při násobení číslem menším než mínus jedna se hodnota v absolutní hodnotě zvětší (proto jsou růžové křížky výš a dál od osy *x* než původní černé), ale protože je jedno číslo v součinu záporné, výsledek má záporné znaménko, takže se překlopí pod osu *x* (červený křížek). Čím je číslo, kterým násobíme, menší (a v absolutní hodnotě větší), tím víc se hodnota v absolutní hodnotě zvětší (růžové křížky jsou čím více nalevo tím výše pod původními černými), po převrácení pak zmenší (červené jsou čím více nalevo tím níže).
- Pokračujeme vpravo od bodu $[-1;-1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná žlutá čára) násobíme hodnotou $-1 < x < 0$ (vodorovná přerušovaná žlutá čára). Při násobení číslem v absolutní hodnotě menším než jedna se hodnota v absolutní hodnotě zmenší (proto jsou růžové křížky níž než původní černé a blíže k ose *x*). Protože jedno číslo v součinu je záporné, výsledek je záporný a křížek se převrátí pod osu *x*. Čím je číslo, kterým násobíme, v absolutní hodnotě menší, tím víc se hodnota v absolutní hodnotě zmenší (růžové křížky jsou čím více vpravo tím níže pod původními černými a blíže k ose *x*).
- Spojením bodů získáme graf funkce $y = x^3$.



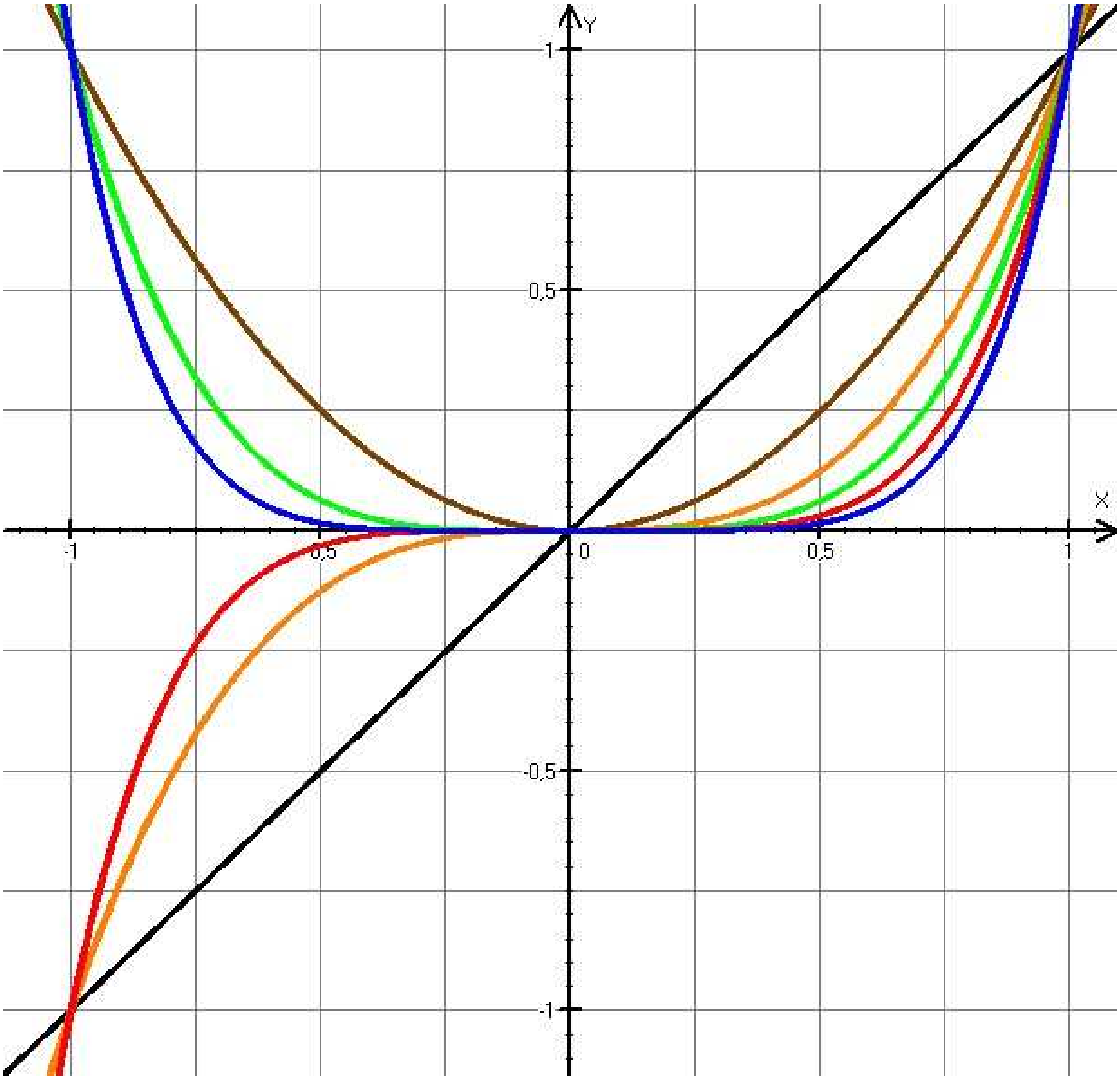
Pro nakreslení grafu není nutné kreslit jednotlivé body, pokud si uvědomujeme postupy popsané výše.

Př. 2: Pomocí postupů popsaných v této kapitole nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$, $y_4 = x^4$, $y_5 = x^5$ a $y_6 = x^6$.

Grafy požadovaných funkcí jsou nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy:
$y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$, $y_4 = x^4$, $y_5 = x^5$ a $y_6 = x^6$.



Protože nejzajímavější je situace v okolí nuly uděláme si detail obrázku:
$y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$, $y_4 = x^4$, $y_5 = x^5$ a $y_6 = x^6$



Z obrázku je zřejmé, že grafy s vyšší mocninou postupně kolem nuly čím dál více naléhají na osu *x* a ve větší vzdálenosti od ní jsou čím dál strmější.
Všechny grafy prochází bodem $[1,1]$.

Pedagogická poznámka: Ještě než studenti začnou kreslit předchozí příklad, je dobré jim připomenout, že funkce budou sice čím dál strmější, ale nikdy se nesmí „vracet zpátky". Musí tedy kreslit první funkce tak, aby měli ještě místo pro další.

Př. 3: Podle obrázků roztřiď mocninné funkce s přirozeným mocnitelem do dvou skupin a urči vlastnosti všech funkcí v každé skupině ($D(f)$, $H(f)$, rostoucí, klesající, sudá, lichá, omezená).

Z obrázků je zřejmé, že jednu skupinu tvoří funkce: $y_1 = x$, $y_3 = x^3$, $y_5 = x^5$, druhou funkce: $y_2 = x^2$, $y_4 = x^4$, $y_6 = x^6$. Pro zařazení do skupiny je rozhodující, zda je mocnitel sudý nebo lichý.

Vlastnosti mocninných funkcí s přirozeným mocnitelem ($y = x^n; n \in N$)

N je liché **n je sudé**

$D(f) = R$

$H(f) = R$

Funkce není omezená.

Funkce je lichá.

Funkce je rostoucí v *R*.

Funkce není nikdy klesající.

tvar „otočené a převrácené S“

$D(f) = R$

$H(f) = \langle 0; \infty)$

Funkce zdola omezená, minimum $[0;0]$.

Funkce je sudá.

Funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0; \infty)$.

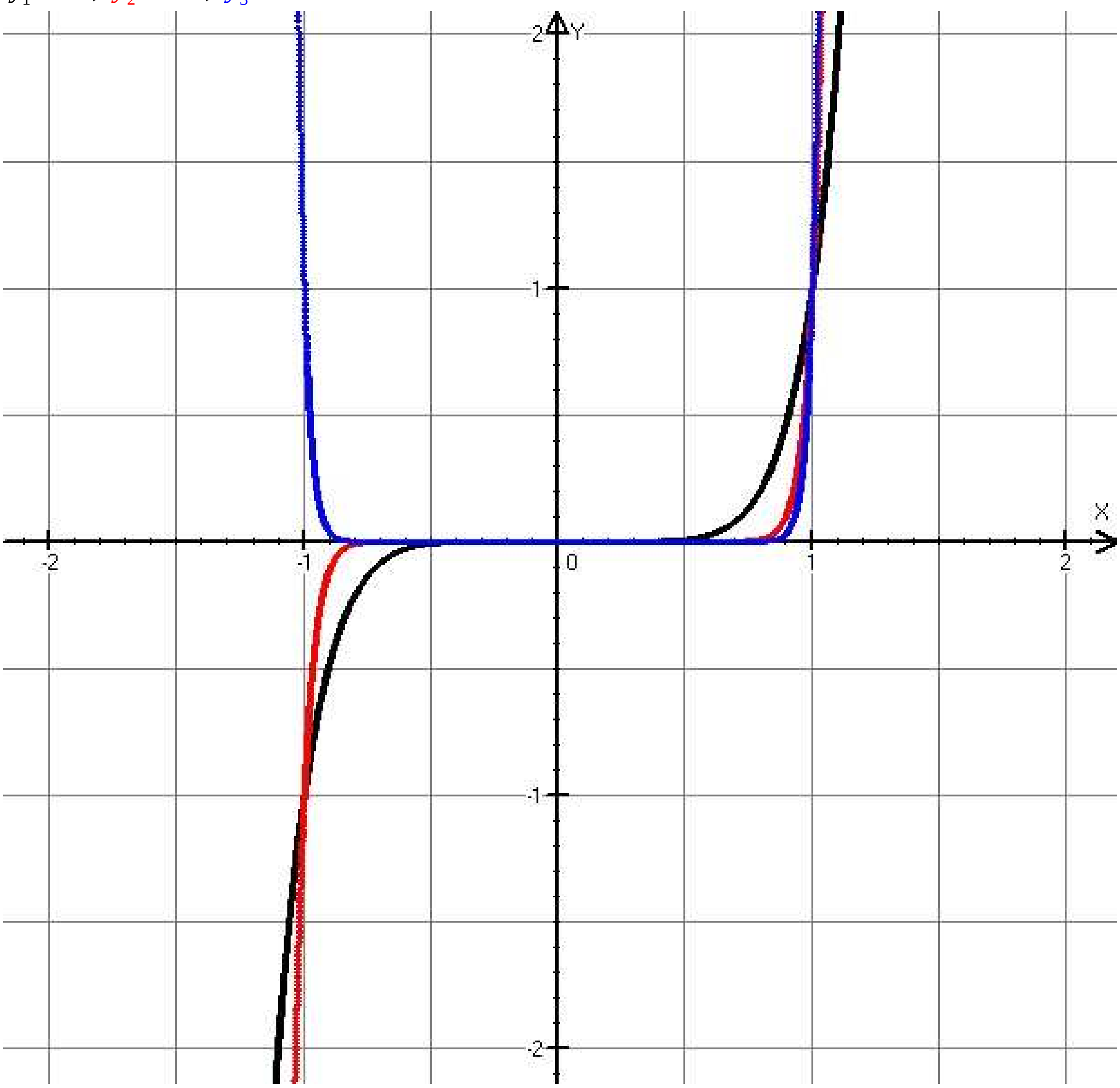
Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; 0\rangle$.

tvar „U“

Teď už víme, proč se říká sudá a lichá funkce.

Př. 4: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y_1 = x^7$, $y_2 = x^{21}$, $y_3 = x^{32}$.

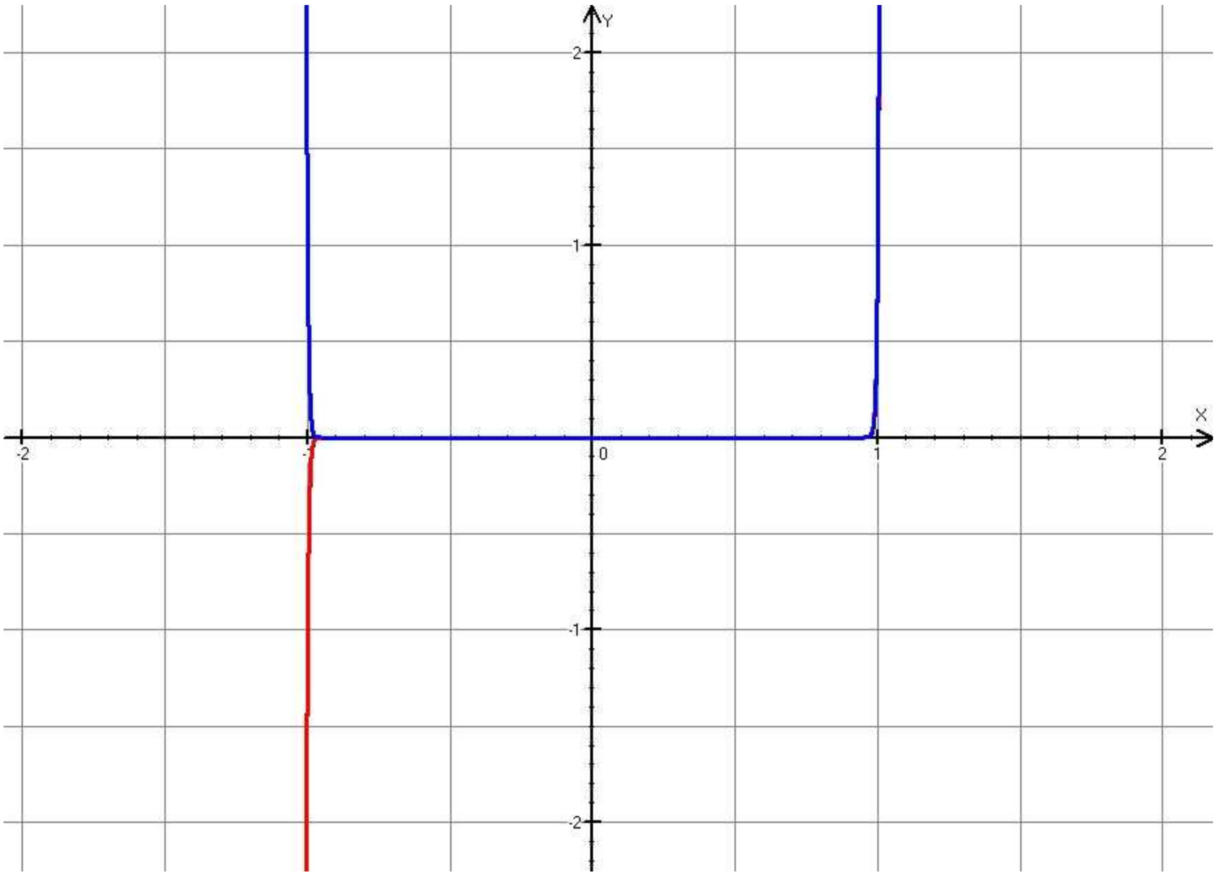
Grafy funkcí jsou nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy:
$y_1 = x^7$, $y_2 = x^{21}$, $y_3 = x^{32}$



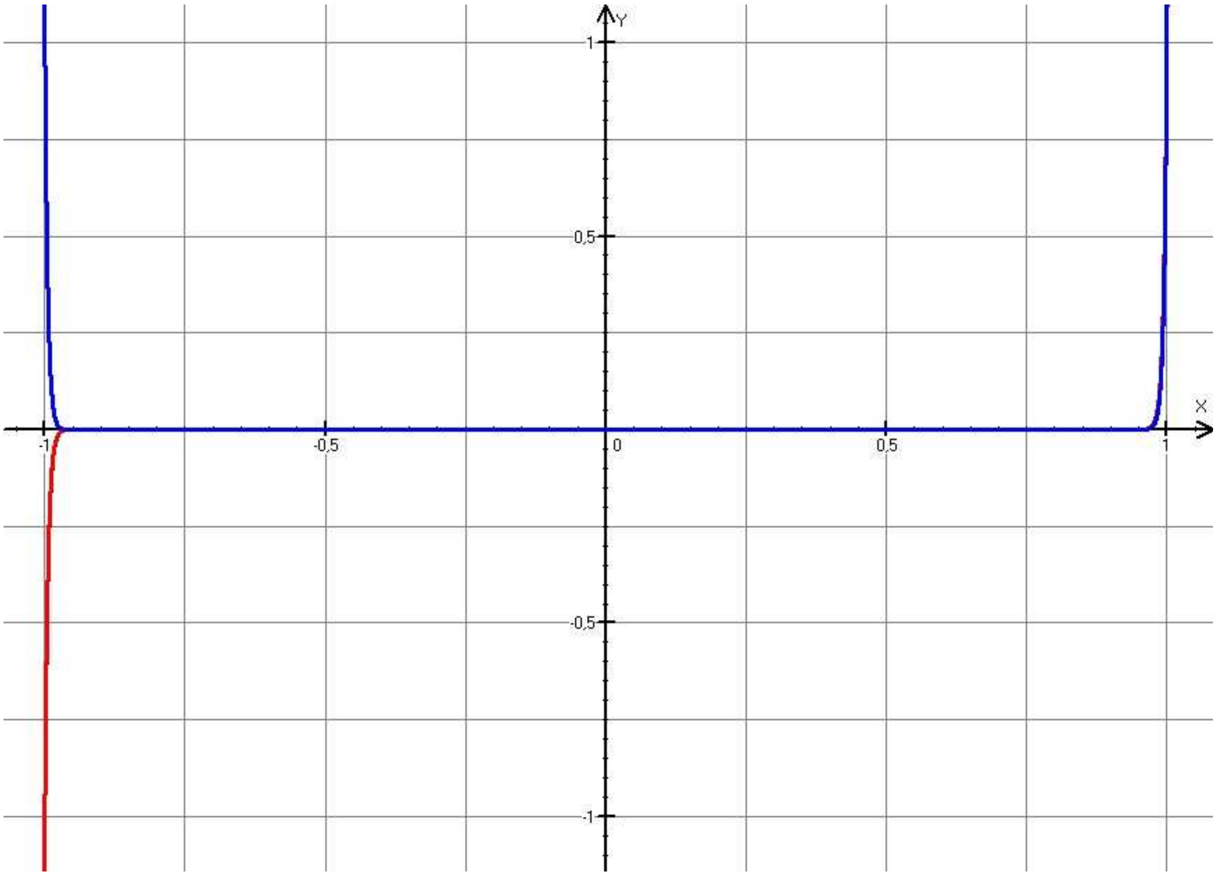
Poznámka: Z obrázku je vidět, že u vysokých mocnin grafy téměř splývají. V takových případech je budeme kreslit pouze schematicky tak, abychom mohli navzájem porovnat hodnoty obou funkcí.

Př. 5: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y_1 = x^{177}$, $y_2 = x^{179}$, $y_3 = x^{190}$.

Grafy požadovaných funkcí jsou nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy:
$y_1 = x^{177}$, $y_2 = x^{179}$, $y_3 = x^{190}$.

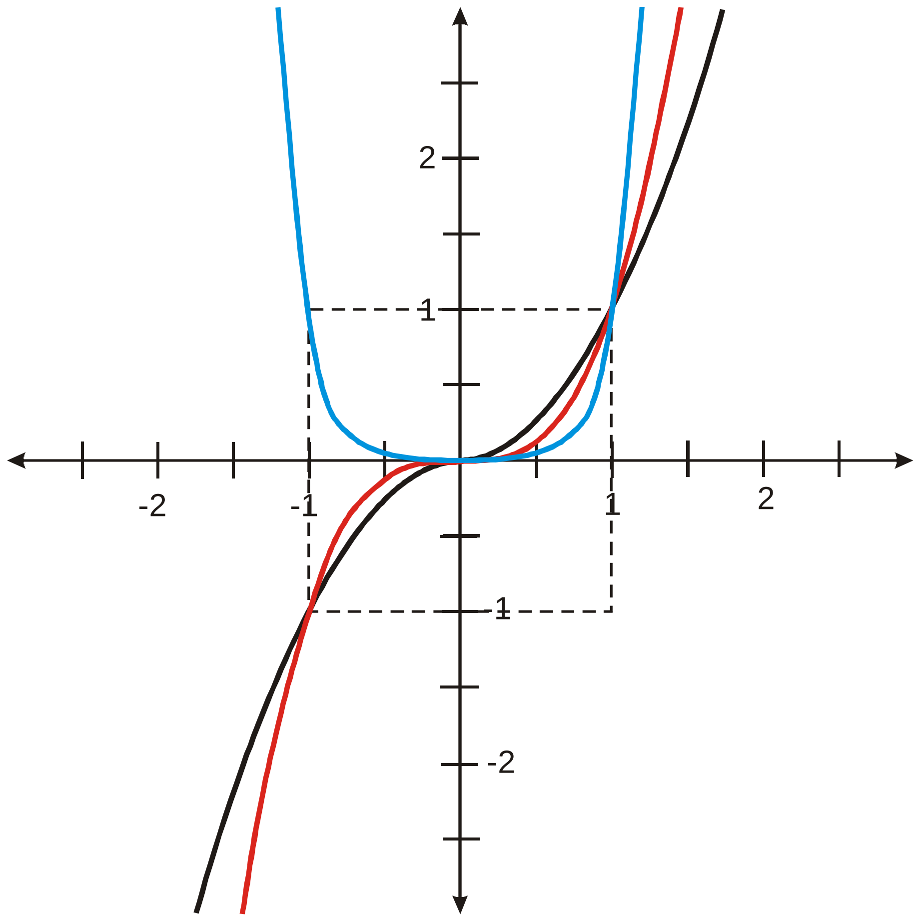


Z počítačového obrázku není bohužel nic vidět.
Zkusíme si přiblížit počátek: $y_1 = x^{177}$, $y_2 = x^{179}$, $y_3 = x^{190}$.



Ani to příliš nepomáhá. Nezbývá, než si nakreslit schématický obrázek – obrázek nebude zachycovat přesně tvar funkcí, ale znázorní rozdíly mezi nimi.

$y_1 = x^{177}$, $y_2 = x^{179}$, $y_3 = x^{190}$



Pedagogická poznámka: Studenti vyřeší poslední příklad, pokud se jim podaří nakreslit obrázek tak, aby na něm nechybělo nic podstatného, co odlišuje jednotlivé funkce od sebe navzájem. V opačném případě je nechám opravovat.

Shrnutí: Pomocí grafického násobení v grafu můžeme snadno odhadnout tvary funkcí $y=x^n, n\in N$.