2.6.1 Lineární lomená funkce

Předpoklady: 2414

Př. 1: 2. B vsadí sportku a vyhraje 50 mil. Určete kolik peněz připadne na jednoho studenta, když se to dozví: 1, 2, 3, 5, 10, 15, 30 studentů.

Studenti	1	2	3	5	10	15	30
Kč(mil)	50	25	16,6	10	5	3,3	1,6

Čim víc lidí se to dozví, tim míň peněz dostanou.

Závislost z předchozího příkladu je možné zapsat funkčním předpisem: $y = \frac{50}{x}$ - známe jako **nepřímá úměrnost**.

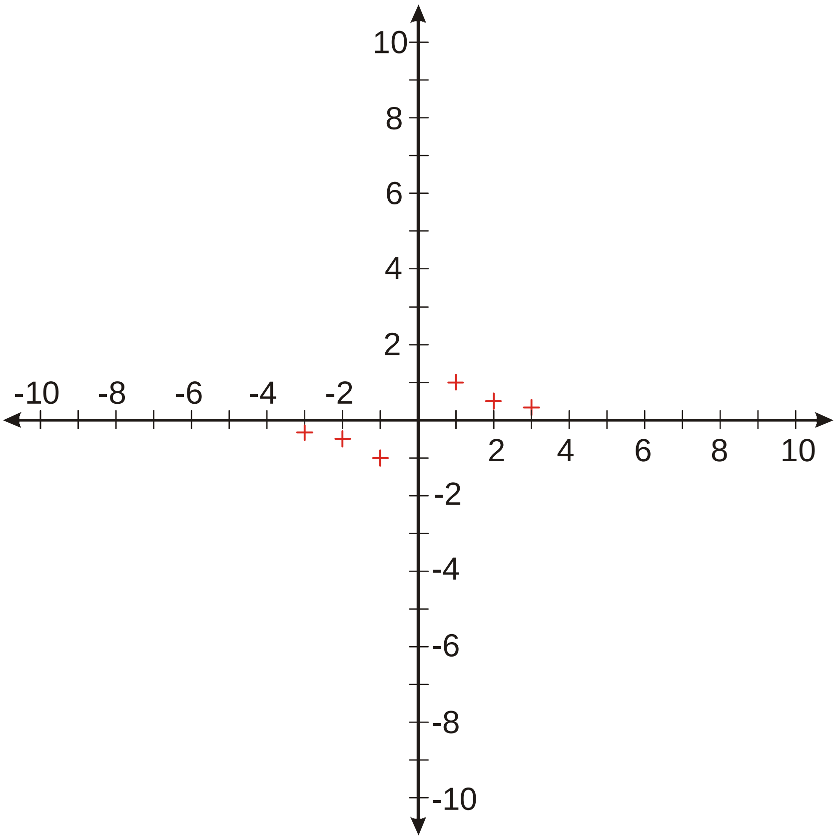
Nepřímá úměrnost je jeden z příkladů **lineární lomené funkce:**

- lomené (dělíme neznámou)
- lineární (neznámá je pouze v první mocnině)

Chování lineární lomené funkce prozkoumáme na jejím nejjednodušším případu $y = \frac{1}{x}$.

Př. 2: S pomocí tabulky načrtni graf funkce $y = \frac{1}{x}$. Pro načrtnutí tabulky využij hodnoty $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



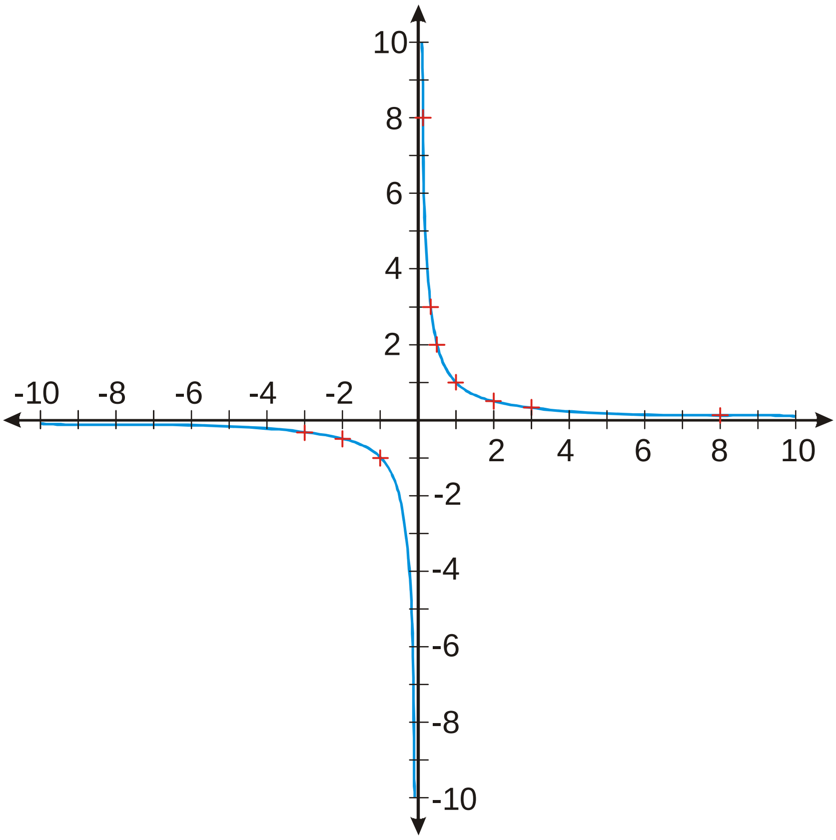
Obrázek zatím nevypadá moc úplně.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti ví, že správným výsledkem příkladu je hyperbola. Ti nakreslí správný graf i podle malého počtu hodnot uvedených v tabulce. Pokud ovšem správný graf neznají, není žádnou samozřejmostí, že body spojí správně, pokud se spletou není to žádná chyba, jenom jim připomenu, že není dobré se příliš unáhlovat.
Každopádně v tomto okamžiku správný graf nekreslím.

Př. 3: Přidej k do tabulky co nejmenší počet dalších sloupců, tak aby si co nejlépe zjistil správný tvar grafu.

Stačí přidávat sloupce pro kladné hodnoty, graf je souměrný podle počátku.
Zjistíme, jak se funkce chová pro větší *x*.
Prozkoumáme chování funkce pro $x \in (0;1)$.

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	8
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	8	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, hlavně u studentů, kteří neví, jak má výsledek vypadat. Z tohoto důvodu se snažím prosakování správného tvaru grafu spíše bránit, dokud si studenti nedopočítají další body do tabulky.

Př. 4: S pomocí nakresleného grafu urči vlastnosti funkce $y=\frac{1}{x}$.

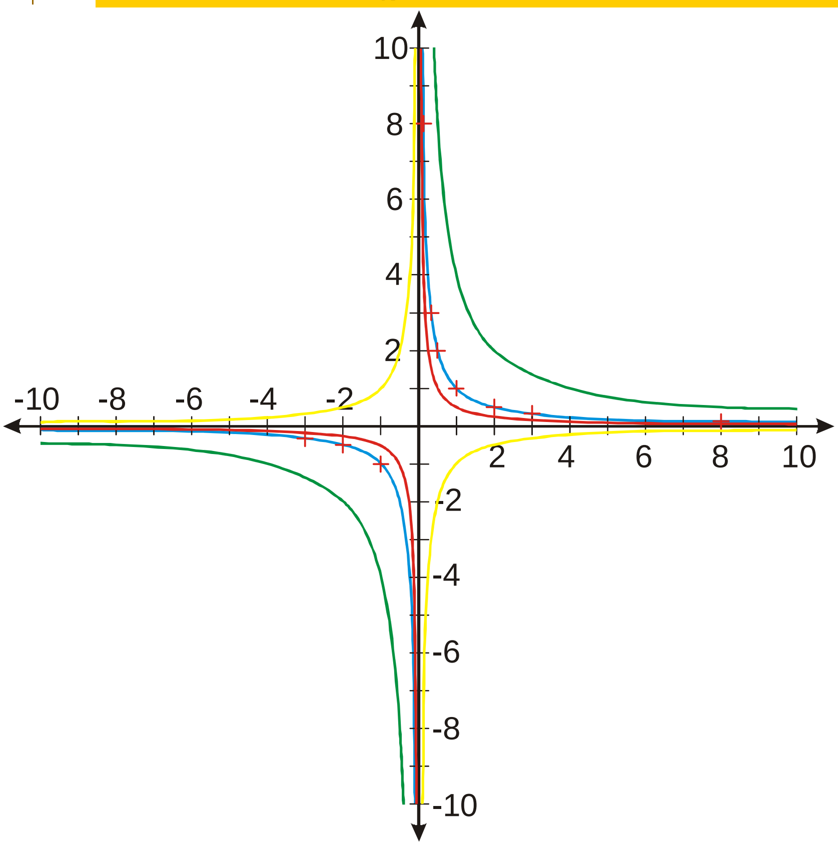
- $D(f)=R-\{0\}$
- $H(f)=R-\{0\}$
- funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku, platí $f(x)=-f(-x)$
- nikdy není rostoucí
- klesající je $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ (**POZOR** není klesající v *R*, protože například neplatí, že $f(2)<f(-2)$)

Graf funkce se pro velká kladná i záporná *x* přibližuje ose *x* (protože hodnoty se přibližují 0), naopak pro malá kladná i záporná *x* se přibližuje ose *y* (hodnoty se přibližují ∞ nebo $-\infty$). Obě osy tvoří „kříž“, ke kterému se přimyká graf, takové přímky se nazývají **asymptoty grafu**. Asymptoty (jejich kříž) a bod $[1,1]$ budeme používat při kreslení grafu, nakreslení asymptot bude vždy předcházet nakreslení grafu.

Př. 5: Přikresli do obrázku s grafem funkce $y=\frac{1}{x}$ grafy funkcí $y=\frac{4}{x}$, $y=\frac{0,5}{x}$ a $y=-\frac{1}{x}$.

Grafy požadovaných funkcí sestrojíme pomocí grafu funkce $y=\frac{1}{x}$ metodou kreslení grafu obecné funkce.

- Graf funkce $y=\frac{4}{x}=4\frac{1}{x}$: Pokud označíme $y=\frac{1}{x}=f(x)$, můžeme psát $y=\frac{4}{x}=4\frac{1}{x}=4f(x)$ - hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}$, násobíme čtyřmi.
- Graf funkce $y=\frac{0,5}{x}=0,5\frac{1}{x}$: Pokud označíme $y=\frac{1}{x}=f(x)$, můžeme psát $y=\frac{0,5}{x}=0,5\frac{1}{x}=0,5f(x)$ - hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}$, násobíme jednou polovinou.
- Graf funkce $y=-\frac{1}{x}$: Pokud označíme $y=\frac{1}{x}=f(x)$, můžeme psát $y=-\frac{1}{x}=-f(x)$ - hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}$, násobíme -1 (graf se převrátí podle osy x).



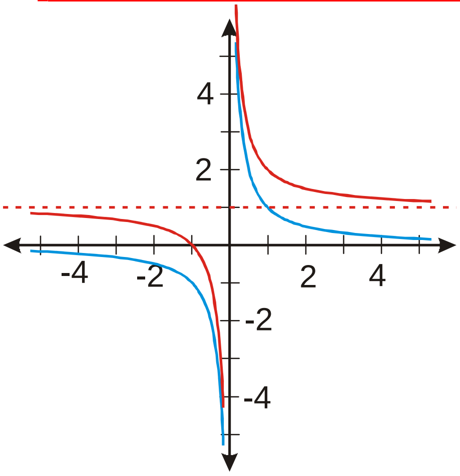
Př. 6: Nakresli graf funkce $y=\frac{1}{x}+1$, urči její definiční obor a obor hodnot.

Platí: $y=\frac{1}{x}+1=f(x)+1$

Zvolím x

Nakreslím funkci $y = f(x) = \frac{1}{x}$

Nakreslím funkci $y = \frac{1}{x} + 1 = f(x) + 1$



$D(f) = R - \{0\}$ - do předpisu funkce nesmím dosadit 0, abych nedělil nulou

$H(f) = R - \{1\}$ - u funkce $y = \frac{1}{x}$ v oboru hodnot chybí nula, když zvýšíme všechny hodnoty o 1, zvýší se i číslo, které není v oboru hodnot

Pedagogická poznámka: Myslím, že z hlediska postupu je ideální následující příklad zadat a kontrolu nechat na příští hodinu.

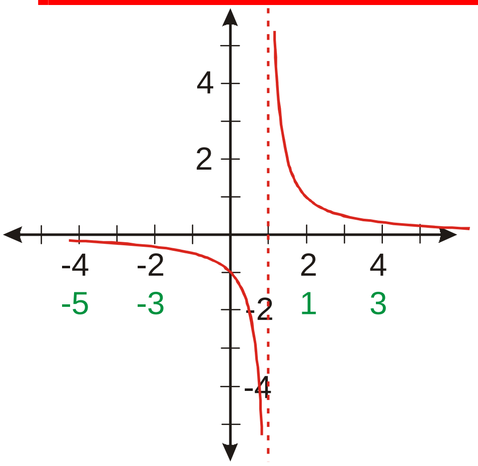
Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{x-1}$, urči její definiční obor a obor hodnot.

Platí: $y = \frac{1}{x-1} = f(x-1)$

Zvolím x

Vypočtu $x-1$

Nakreslím funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$



$D(f) = R - \{1\}$

$H(f) = R - \{0\}$

Shrnutí: Grafem nepřímé úměrnosti (i dalších lineárně lomených funkcí) je hyperbola.