2.5.13 Slovní úlohy o pohybu

Předpoklady: 2507, 2512

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny není možné stihnout za 45 minut. Ideální je věnovat hodiny dvě, pokud máte málo času, je možné vynechávat (nejspíše příklad 2 a 7, případně další). Hlavním cílem hodiny je sestavování rovnic, proto v okamžiku sestavení rovnice nenechávám třídu vždy dopočítávat a jdeme na další příklad. Při sestavování rovnice provádíme kontrolu vždy po krocích ne po celých příkladech. Šikovnější samozřejmě počítají dopředu.

Nejdříve minuta fyziky.
Auto jede rychlostí 90 km/h. Kolik ujede za:

1 hodinu	90 km
2 hodiny	180 km
10 hodin	900 km

$\Rightarrow$ pokud se někdo nebo něco pohybuje stále stejnou rychlostí, platí vztah $dráha = rychlost \cdot čas$, vzorcem $s = vt$.
Ze vztahu jde samozřejmě vypočítat i rychlost a čas.

O všech pohybech v našich příkladech budeme předpokládat, že jsou rovnoměrné.

Pedagogická poznámka: Následující příklady sice nevedou na kvadratickou rovnici, ale k ostatním logicky patří. Příklady vedoucí na kvadratické rovnice jsou většinou těžší a následují vzápětí.

Pře řešení příkladů o pohybech platí vše, co jsme si říkali o řešení slovních úloh obecně, zejména:

- Řešení nehledáme najednou, ale postupně.
- Musíme znát význam každého výrazu v zadání.
- Každá informace v zadání většinou slouží k sepsání jedné rovnice nebo jednoho vztahu mezi veličinami.

Většinu příkladu je možné řešit přibližně tímto postupem (je nutné upozornit, že nejde o závazný nebo vše řešící doslovný manuál):

- Provedeme označení neznámých. Pokud má pohyb více částí (rychlejší, pomalejší …), v každé části označíme dráhu, rychlost i čas odpovídajícím indexem
- Sestavíme základní rovnici. Tento krok je nejtěžší, naštěstí základní rovnice nemusí být pouze jedna, většinou je možné volit z více variant, které všechny vedou ke správnému výsledku. Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi hodnotami jedné veličiny v různých částech pohybu, většinou ji lze najít podle následujících znaků:
    - Jde o veličinu jejíž hodnoty popisují základní informaci v zadání (pokud je hlavní informací příkladu, že všichni ujeli stejnou vzdálenost, měla by to být rovnice pro dráhy, pokud jde o to, že se dodržel jízdní řád, mělo by jít o rovnici pro čas…).
    - Jde o veličinu, jejíž hodnoty neznáme (abychom byli nuceni dosazovat).
    - Nejde o veličinu, jejíž hodnotu máme spočítat (při dalším postupu, budeme dosazováním druh veličiny měnit a tím řešení prodloužíme).

- Pomocí jednoho ze vztahů $s = vt, v = \frac{s}{t}; t = \frac{s}{v}$ přejdeme v základní rovnici k jiné veličině (a využijeme část informací ze zadání).
- Využijeme zbývající informace ze zadání, aby v rovnici zůstala jediná proměnná (pokud v rovnici před tímto bodem byly například dvě různé rychlosti, v tomto bodě musíme zajistit pomocí vztahu mezi nimi, aby zůstala jediná).
- Vzniklou rovnici (nebo jejich soustavu) řešíme.

Př. 1: První část cyklistické trasy tvoří stoupání dlouhé 3 km, zbylou část klesání dlouhé 13 km. Pavlova průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti na první části trasy, jež byla o 16 km/h menší než na druhé části trasy. Za jak dlouho ujel Pavel celou trasu?

Volba proměnných: Trasa má dvě části.

- **Nahoru:** Jede dráhu nahoru $s_n = 3\,\text{km}$, rychlostí v_n po dobu t_n.
- **Dolu:** Jede dráhu dolů $s_d = 13\,\text{km}$, rychlostí v_d po dobu t_d.
- **Celkově:** Ujel dráhu s, průměrnou rychlostí v_p za dobu t.

Základní rovnice: Potřebujeme sice určit čas, ale v průběhu pohybu je řeč o třech rychlostech $\Rightarrow$ získali bychom dvě rovnice(problém), všechny dráhy známe (rovnice z nich by neobsahovala žádnou proměnou) $\Rightarrow$ sestavíme rovnici pro čas:
Celkový čas je součet času pro jízdu do kopce a z kopce: $t = t_n + t_d$.

Změna veličiny: Časy můžeme vyjádřit pomocí drah a rychlostí (vzorec $t = \frac{s}{v}$):

$$\frac{s}{v_p} = \frac{s_n}{v_d} + \frac{s_d}{v_d}.$$

Délky tras známe: $\frac{16}{v_p} = \frac{3}{v_n} + \frac{13}{v_d}$.

Snížení počtu neznámých: Pomocí informací ze zadání vyjádříme všechny rychlosti pomocí jedné z nich.
Průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti na první části: $v_p = 2v_n$
Rychlosti na první části byla o 16 km/h menší než na druhé části trasy: $v_d = v_n + 16$

Dosadíme: $\frac{16}{2v_n} = \frac{3}{v_n} + \frac{13}{v_n + 16} \quad / \cdot 2v_n \cdot (v_n + 16)$

$$16v_n + 256 = 3 \cdot 2 \cdot (v_n + 16) + 13 \cdot 2 \cdot v_n$$

$$16v_n + 256 = 6v_n + 96 + 26v_n$$

$$16v_n = 160$$

$$v_n = 10\ \text{km/h}$$

$$v_p = 2v_n = 2 \cdot 10 = 20\ \text{km/h}$$

$$t = \frac{s}{v_p} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}\,\text{hod} = 48\ \text{min}$$

Pavel jel celou trasu 48 minut.

Př. 2: Osobní auto projelo dálniční úsek stálou rychlostí. Při rychlosti o 20 km/h větší by mu jízda trvala o 12 minut méně, při rychlosti o 20 km/h nižší o 18 minut více. Urči délku úseku.

Volba proměnných: Příklad mluví o třech pohybech:

- **Skutečná jízda:** s_s, v_s t_s
- **Rychlejší jízda:** s_r, v_r t_t
- **Pomalejší jízda:** s_p, v_p t_p

Základní rovnice: Základní informací příkladu je, že auto ve všech třech případech projelo stejnou dráhu. Jde o srovnání tří pohybů $\Rightarrow$ sestavíme dvě rovnice pro dráhu:
Délka dálničního úseku je stále stejná:

$s_s = s_r$

$s_s = s_p$

Změna veličiny: Dráhy můžeme vyjádřit pomocí rychlostí a časů (vzorec $s = vt$):

$v_s t_s = v_r t_r$

$v_s t_s = v_p t_p$

Snížení počtu neznámých: Pomocí informací ze zadání vyjádříme všechny rychlosti pomocí jedné z nich.

Při rychlosti o 20 km/h větší by mu jízda trvala o 12 minut méně: $v_s t_s = (v_s + 20)\cdot\left(t_s - \frac{12}{60}\right)$

Při rychlosti o 20 km/h nižší by mu jízda trvala o 18 minut více: $v_s t_s = (v_s - 20)\cdot(t_s + \frac{18}{60})$

Sestavíme rovnice do soustavy a přestaneme psát indexy (všechny jsou stejné):

$$vt = (v+20)\cdot\left(t - \frac{12}{60}\right)$$

$$vt = (v-20)\cdot\left(t + \frac{18}{60}\right)$$

$$vt = (v+20)\cdot\left(t - \frac{1}{5}\right)$$

$$vt = (v-20)\cdot\left(t + \frac{3}{10}\right)$$

$$vt = vt - 4 - \frac{v}{5} + 20t$$

$$vt = vt - 6 + \frac{3v}{10} - 20t$$

$$20t = 4 + \frac{v}{5} \qquad /\cdot 5$$

$$-20t = 6 - \frac{3v}{10} \qquad /\cdot 10$$

$$v - 100t = -20$$

$$200t - 3v = -60$$

Vyjádříme v: $v - 100t = -20 \Rightarrow v = 100t - 20$ a dosadíme do druhé rovnice:

$200t-3(100t-20)=-60$

$10t=12$

$t=1,2\,\mathrm{h}$

$v=100\cdot 1,2-20 \;\Rightarrow\; v=100\,\mathrm{km/h}$

$s=100\cdot 1,2 \;\Rightarrow\; s=120\,\mathrm{km}$

Dálniční úsek má délku 120 kilometrů.

Poznámka: Z obou předchozích příkladů je zřejmé, že nemůžeme zásady uvedené v začátku kapitoly uplatňovat mechanicky. Vždy záleží na konkrétní situaci, nejlepším vodítkem je zkušenost.

Př. 3: Chodec ušel vzdálenost 8 km. Kdyby šel rychleji o 1 km za hodinu, byl by v cíli o 24 minut dříve. Jakou rychlostí šel?

Volba proměnných: Zadání mluví o dvou pohybech: skutečném (zavedeme index *s*) a rychlejším (index *r*).
Základní rovnice: Dráhu obou pohybů známe, chceme určit rychlost $\Rightarrow$ začneme rovnicí pro časy. Kdyby sel rychleji, byl by v cíli o 24 minut dříve: $t_r=t_s-\frac{2}{5}$.

Změna veličiny: Oba časy je možné vypočíst pomocí vzdálenosti a rychlosti chodce: $t_s=\frac{8}{v_s}$, $t_r=\frac{8}{v_r} \;\Rightarrow\; \frac{8}{v_r}=\frac{8}{v_s}-\frac{2}{5}$.

Snížení počtu neznámých: Pro rychlostí platí: $v_s+1=v_r$

Dosadíme: $\frac{8}{v_s+1}=\frac{8}{v_s}-\frac{2}{5}$.

Zrušíme indexy: $\frac{8}{v+1}=\frac{8}{v}-\frac{2}{5} \quad /\frac{5}{2}v(v+1)$.

$4\cdot 5v=4\cdot 5(v+1)-v(v+1)$

$20v=20v+20-v^2-v$

$v^2+v-20=0$

$(v+5)(v-4)=0$

$v_1=-5$ - nedává smysl

$v_2=4$

Chodec šel rychlostí $4\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Př. 4: Vyřeš předchozí příklad. Jako základní rovnici použij vztah mezi rychlostmi.

Volba proměnných: Zadání mluví o dvou pohybech: skutečném (zavedeme index *s*) a rychlejším (index *r*).
Základní rovnice: Kvůli zadání nemáme volbu: $v_s+1=v_r$.

Změna veličiny: Obě rychlosti je možné vypočíst pomocí vzdálenosti a času $v_s=\frac{8}{t_s}$, $v_r=\frac{8}{t_r}$

$\Rightarrow \frac{8}{t_s}+1=\frac{8}{t_r}$.

Snížení počtu neznámých: Při rychlejší chůzi by byl v cíli o 24 minut dříve:

$t_r=t_s-\frac{24}{60}=t_s-\frac{2}{5}$.

Dosadíme do rovnice: $\frac{8}{t_s}+1=\frac{8}{t_s-\frac{2}{5}}$ $\quad / t_s\left(t_s-\frac{2}{5}\right)$, dál už budeme značit čas jenom *t*.

$$8\left(t-\frac{2}{5}\right)+t\left(t-\frac{2}{5}\right)=8t \quad /\cdot 5$$

$$40t-16+5t^2-2t=40t$$

$$5t^2-2t-16=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 5\cdot(-16)}}{2\cdot 5}=\frac{2\pm 18}{10}$$

$$t_1=\frac{2+18}{10}=2$$

$$t_2=\frac{2-18}{10}=-1{,}6 \Rightarrow \text{ nesmysl}$$

$$v_s=\frac{8}{t_s}=\frac{8}{2}\frac{\text{km}}{\text{h}}=4\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Chodec šel rychlostí $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Př. 5: Franta šel na diskotéku, která se konala 6 km od jeho domova. Zpět se vracel trochu společensky unavený rychlostí o 2 km/h nižší než při cestě tam. Proto mu cesta trvala o 48 minut déle. Jak dlouho se vracel domů?

Volba proměnných: Zadání mluví o dvou pohybech: cestě tam (zavedeme index *t*) a cestě zpět (index *z*).

Základní rovnice: Dráhu známe, zjišťujeme čas $\Rightarrow$ vyjdeme z rovnice pro rychlosti.

Zpět se vracel unavený rychlostí o 2 km/h nižší než při cestě tam $v_t=v_z+2$

Změna veličiny: Obě rychlosti je možné určit pomocí vzdálenosti a času $\Rightarrow \frac{6}{t_t}=\frac{6}{t_z}+2$.

Snížení počtu neznámých: Cesta zpět trvala o 48 minut déle: $t_t=t_z-\frac{48}{60}=t_z-\frac{4}{5}$

Dosadíme: $\frac{6}{t_z-\frac{4}{5}}=\frac{6}{t_z}+2 \quad /\left(t_z-\frac{4}{5}\right)t_z$

Dále používáme pouze proměnnou *t*: $6t=6\left(t-\frac{4}{5}\right)+2\left(t-\frac{4}{5}\right)t$

$$6t=6t-\frac{24}{5}+2t^2-\frac{8}{5}t \quad /\cdot 5$$

$10t^2 - 8t - 24 = 0 \quad /:2$

$5t^2 - 4t - 12 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12)}}{2 \cdot 5} = \frac{4 \pm 16}{10}$$

$$t_1 = \frac{4+16}{10} = 2$$

$$t_2 = \frac{4-16}{10} = -1,2$$

Franta se z diskotéky vracel 2 hodiny.

Př. 6: Český mezinárodní rychlík má podle jízdního řádu urazit vzdálenost 80 km stálou rychlostí bez jediné zastávky. Při jízdě musel vlak na 50 km trasy na 3 minuty zastavit. Zbytek trasy pak musel jet o 20 km/h rychleji než mu přikazuje plán, aby ztrátu dohnal. Jakou rychlostí měl podle plánu vlak jet?

Volba proměnných: Zadání mluví o dvou pohybech: plánované jízdě (zavedeme index *p*) a skutečné jízdě (index *s*).
Základní rovnice: Dráhy známe, chceme rychlost $\Rightarrow$ vyjdeme z rovnice pro časy.
Vlak ztrátu dohnal: $t_p = t_s = cas\, normalni\ jizdy + cas\, stani + cas\, dohaneni$
Změna veličiny: Časy je možné vypočíst pomocí vzdáleností a rychlostí:
Plánovaný čas: $t_p = \frac{80}{v_p}$, čas normální jízdy: $\frac{50}{v_p}$, čekání 3 minuty: $\frac{3}{60}$, čas dohánění: $\frac{30}{v_s}$

$$\frac{80}{v_p} = \frac{50}{v_p} + \frac{3}{60} + \frac{30}{v_s}$$

Snížení počtu neznámých: . Zbytek trasy pak musel jet o 20 km/h rychleji: $v_s = v_p + 20$

$$\frac{80}{v_p} = \frac{50}{v_p} + \frac{1}{20} + \frac{30}{v_p + 20} \quad / 20 \cdot v_p \left(v_p + 20\right)$$ Dále používáme pouze označení *v*:

$80 \cdot 20(v+20) = 50 \cdot 20(v+20) + v(v+20) + 30 \cdot 20 \cdot v$

$1600v + 32000 = 1000v + 20000 + v^2 + 20v + 600v$

$v^2 + 20v - 12000 = 0$

$(v+120)(v-100) = 0$

$v_1 = -120$ - nemá smysl

$v_2 = 100$

Rychlík měl jet trasu rychlostí $100\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Př. 7: Ivan urazil na kole trať dlouhou 96 km v čase o 2 hodiny kratším, než původně plánoval. Přitom každou hodinu ujel o 1 km více, než měl původně urazit za 1 hodinu a 15 minut. Jakou rychlostí Ivan skutečně jel.

Volba proměnných: Zadání mluví o dvou pohybech: plánované jízdě (zavedeme index *p*) a skutečné jízdě (index *s*).
Základní rovnice: Dráhy známe, chceme rychlost $\Rightarrow$ vyjdeme z rovnice pro časy.
Ivan urazil na kole trať v čase o 2 hodiny kratším: $t_p = t_s + 2$.

Změna veličiny: Časy je možné vypočíst pomocí vzdáleností a rychlostí:

Plánovaný čas: $t_p = \frac{96}{v_p}$, čas skutečný: $\frac{96}{v_s}$ $\Rightarrow$ $\frac{96}{v_p} = \frac{96}{v_s} + 2$.

Snížení počtu neznámých:

Najít vztah mezi rychlostmi bude složitější. Rychlost je dráha uražená za jednu hodinu

dráha, kterou měl urazit za 1 hodinu a 15 minut: $v_p \left(1 + \frac{15}{60}\right) = v_p \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} v_p$

za hodinu ujel o 1 km více, než měl původně urazit za 1 hodinu a 15 minut: $v_s = \frac{5}{4} v_p + 1$

Dosadíme do rovnice: $\frac{96}{v_p} = \frac{96}{\frac{5}{4} v_p + 1} + 2$ Dále používáme pouze proměnou *v*.

$$\frac{96}{v} = \frac{4 \cdot 96}{5v + 4} + 2 \qquad / \frac{v(5v+4)}{2}$$

$$48(5v+4) = 192v + v(5v+4)$$

$$240v + 192 = 192v + 5v^2 + 4v$$

$$5v^2 - 44v - 192 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-44) \pm \sqrt{(-44)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-192)}}{2 \cdot 5} = \frac{44 \pm 76}{10}$$

$$v_1 = \frac{44 + 76}{10} = 12$$

$$v_2 = \frac{44 - 76}{10} = -3{,}2$$

Dopočteme skutečnou rychlost: $v_s = \frac{5}{4} v_p + 1 = \frac{5}{4} \cdot 12 + 1 = 16$.

Ivan projel trať rychlostí 16 km/h.

Př. 8: Petáková:
strana 19/cvičení 58
strana 19/cvičení 59
strana 20/cvičení 60

Shrnutí: