2.5.12 Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice

Předpoklady: 2507

Pedagogická poznámka: Při řešení slovních úloh studenti postupují značně rozdílnými rychlostmi, takže se třída v postupu rychle rozpadne. Snažím se, aby všichni alespoň zkusili nějaké rovnice sestavit a neopsali všechno z tabule. Postup určuji tak, aby alespoň příklady 1,3 a 6 měl každý.

Př. 1: Obdélník má obvod 80 m a obsah $351\,\mathrm{m}^2$. Urči délky jeho stran.

Označíme si strany a, b $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice.
Obsah je $351\,\mathrm{m}^2$ … $ab = 351$
Obvod je $80\,\mathrm{m}$ … $2a + 2b = 80$
Z druhé rovnice si vyjádříme b a dosadíme do první: $a + b = 40 \Rightarrow b = 40 - a$.

$$ab = a(40 - a) = 351$$
$$40a - a^2 = 351$$
$$a^2 - 40a + 351 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 351}}{2 \cdot 1} = \frac{40 \pm 14}{2}$$
$$a_1 = \frac{40 + 14}{2} = \frac{54}{2} = 27 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 40 - 27 = 13$$
$$a_2 = \frac{40 - 14}{2} = \frac{26}{2} = 13 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 40 - 13 = 27$$

Strany obdélníku mají velikosti 27 a 13 m.

Př. 2: Urči rozměry obdélníku, který má obvod 24 cm a délku úhlopříčky 9 cm.

Délka jedné strany … a
Délka druhé strany … $12 - a$ (pro obvod platí $2a + 2b = 24 \Rightarrow b = 12 - a$)
Pro úhlopříčku a strany obdélníku platí Pythagorova věta: $u^2 = a^2 + b^2$. $\Rightarrow$

$$9^2 = a^2 + (12 - a)^2$$
$$81 = a^2 + 144 - 24a + a^2$$
$$2a^2 - 24a + 63 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 63}}{2 \cdot 2} = \frac{24 \pm 6\sqrt{2}}{4}$$
$$a_1 = \frac{24 + 6\sqrt{2}}{4} = 6 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \Rightarrow b_1 = 12 - \left(6 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$$
$$a_2 = \frac{24 - 6\sqrt{2}}{4} = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = 12 - \left(6 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 6 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Délky obdélníku mají velikosti $6 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ a $6 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Př. 3: Najdi dvojciferné číslo pro které platí:
Číslice na místě jednotek je o 1 větší než číslice na místě desítek.
Součin čísla a jeho ciferného součtu je 405.

Číslo zapíšeme ve tvaru xy $\Rightarrow$ jeho hodnota je $xy = 10x + y$.
Číslice na místě jednotek je o 1 větší než číslice na místě desítek $\Rightarrow$ $y = x + 1$.
Ciferný součet čísla $x + y = x + x + 1 = 2x + 1$.
Součin čísla a jeho ciferného součtu je 405 $\Rightarrow$ $(10x + x + 1)(2x + 1) = 405$.

$$(11x+1)(2x+1) = 405$$
$$22x^2 + 11x + 2x + 1 = 405$$
$$22x^2 + 13x - 404 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 22 \cdot (-404)}}{2 \cdot 22} = \frac{-13 \pm 189}{44}$$
$$x_1 = \frac{-13+189}{44} = \frac{176}{44} = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x_1 + 1 = 4 + 1 = 5$$
$x_2 = \frac{-13-189}{44} = -\frac{202}{44} = -\frac{101}{22}$ - zjevně nesmyslný výsledek, hledáme číslici (číslo 0 do 9).
Hledané číslo je číslo 45.

Pedagogická poznámka: Pokud nemají studenti ztratit příliš mnoho času, je nutné je brzo po zadání upozornit na zápis čísla ve tvaru $xy = 10x + y$. Tento trik jsme sice používali dříve, ale téměř nikdo si ho nepamatuje.

Př. 4: Cena časopisu byla snížena o tolik procent, kolik korun stál před snížením ceny. Urči jeho původní cenu, jestliže po zlevnění stál 16 Kč.

Původní cena … x Kč
Nová cena ve formě zlomku … $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$
Nová cena … $x\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 16$

$$x - \frac{x^2}{100} = 16$$
$$100x - x^2 = 1600$$
$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$
$$(x-20)(x-80) = 0$$
Dvě řešení: 20 Kč, 80 Kč.

Př. 5: Turnaj ve fotbale se hrál systémem „každý s každým jeden zápas“. Kolik týmů se turnaje zúčastnilo, když bylo odehráno celkem 36 utkání?

Musíme odvodit vzorec, který udává, jak závisí počet utkání na počtu týmů.
Máme *n* týmů.

Kolik musí odehrát jeden z týmů celkem zápasů? $(n-1)$ (s každým týmem, kromě sebe)

Stejný počet zápasů odehraje každý z n týmů: $n(n-1)$

Pozor: Každý zápas jsme počítali dvakrát (například zápas týmů A a B jsme počítali jako zápas, který hraje tým A s někým jiným, a pak jako zápas, který hraje tým B s někým jiným)

$\Rightarrow$ výraz musíme vydělit dvěma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dosadíme 36 utkání: $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \quad /\cdot 2$.

$n^2 - n = 72$

$n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow n_1 = 9$, $n_2 = -8$, význam má pouze kladný kořen

Turnaje se zúčastnilo 9 týmů.

Př. 6: Bazén se naplní vodou za 6 hodin, jsou-li otevřeny oba přívody. Jedním z nich by se bazén naplnil o 5 hodin dříve než druhým. Za jak dlouho se bazén naplní, otevřeme-li pouze výkonnější přívod?

Oba přívody 6 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{6}$ práce.

První přívod $(x-5)$ hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{x-5}$ práce.

Druhý přívod x hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{x}$ práce.

Část napuštěná oběma přívody za 1 hodinu = část napuštěná prvním přívodem + část napuštěná druhým přívodem: $\frac{1}{6} = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} \quad /\cdot 6(x-5)x$

$x(x-5) = 6x + 6(x-5)$

$x^2 - 5x = 6x + 6x - 30$

$x^2 - 17x + 30 = 0$

$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - (4\cdot 1\cdot 30)}}{2} = 2; 15$ 2 nemůže být správně (aby $x-5>0$)

První (výkonnější) přívod: $x - 5 = 15 - 5 = 10\,\text{hodin}$.

Bazén se naplní výkonnějším přívodem za 10 hodin.

Pedagogická poznámka: Podobně jako v příkladu 3, po chvíli připomenu trik pro řešení příkladů na společnou práci (vše za 6 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{6}$ práce).

Př. 7: Zuzka a Ondra píšou za trest dohromady 740 krát větu „Naučím se rámečky.“ Oba musí napsat stejný počet vět, Zuzka píše o trochu rychleji, protože napíše o dvě věty za minutu více. Kolikrát dokáže Ondra napsat za minutu zmiňovanou větu, pokud oba dohromady stráví nad trestem 65 minut?

Počet vět, které napíší hříšníci za minutu: v_O, v_Z.

Doba psaní trestu: t_O, t_Z.

Dohromady psali test 65 minut: $t_O + t_Z = 75$

Doba psaní trestu = $\dfrac{pocet\ vet}{pocet\ vet\ napsanych\ za\ minutu} \Rightarrow t_O = \dfrac{420}{v_O}$. $t_Z = \dfrac{420}{v_Z}$

Dosadíme: $\dfrac{420}{v_O} + \dfrac{420}{v_Z} = 65$.

Zuzka napíše o dvě věty za minutu více: $v_Z = v_O + 2$

$\dfrac{420}{v_O} + \dfrac{420}{v_O + 2} = 65 \quad / \dfrac{v_O(v_O+2)}{5}$. (dále používáme místo v_O pouze v)

$84(v+2) + 84v = 13v(v+2)$

$84v + 168 + 84v = 13v^2 + 26v$

$13v^2 - 142v - 168 = 0$

$v_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-142) \pm \sqrt{(-142)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-168)}}{2 \cdot 13} = \dfrac{142 \pm 170}{26}$

$v_{1,2} = \dfrac{142+170}{26} = \dfrac{312}{26} = 12$

$v_{1,2} = \dfrac{142-170}{26} = -\dfrac{28}{26} = -\dfrac{14}{13}$ nemá smysl

Ondra napíše větu „Naučím se rámečky.“ každou minutu dvanáctkrát.

Př. 8: Petáková:
strana 19/cvičení 48
strana 19/cvičení 49
strana 19/cvičení 51

Shrnutí: