2.5.10 Kvadratické nerovnice

Předpoklady: 2501, 2502, 2505, 2507

Př. 1: Vyřeš nerovnici $x^2 - x - 2 \le 0$.

$x^2 - x - 2 \le 0$ - mohu rozložit na součin $\Rightarrow$ není to nic nového

$(x-2)(x+1) \le 0$

Hledám nulové body:

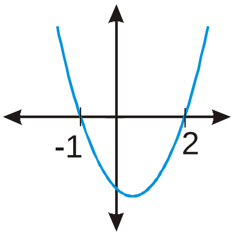
$(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ $\quad\quad\quad$ $(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

	$(-\infty;-1)$	$(-1;2)$	$(2;\infty)$
$(x-2)$	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+
$(x-2)(x+1)$	+	-	+

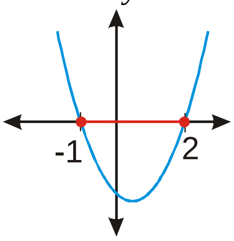
$K = \langle -1, 2 \rangle$

Úvaha: Levá strana nerovnice – předpis kvadratické funkce. Nešlo by využít její graf? Jak vypadá?

- Prochází body $[-1;0]$, $[2;0]$ (jsou to nulové body rovnice, hodnota výrazu = předpisu, je tam nula), další podrobnosti nás nezajímají,
- má tvar „ďolíku“ (před *x* je kladné číslo).



Hledáme *y* menší nebo rovné nule $\Rightarrow$ na grafu body na nebo pod osou *x*.



$K = \langle -1, 2 \rangle$

Jde to a je to rychlejší.

Pedagogická poznámka: Při kreslení grafu je dobré si se studenty popovídat o tom, co musí obrázek z hlediska našich požadavků obsahovat.

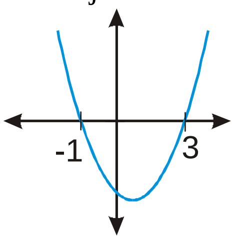
Pedagogická poznámka: Řazení příkladů má svůj význam. Příklady 2 a 3 slouží k tomu, aby si studenti osvojili metody s využitím grafu funkce. V příkladu 4 pak studenti narazí na problém.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $x^2-2x-3>0$.

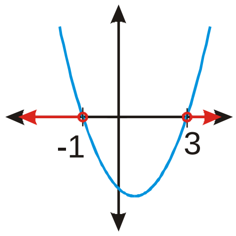
Hledáme nulové body: $(x-3)(x+1)=0$

$(x-3)=0 \Rightarrow x=3$ $\qquad$ $(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body nad osou $x \Rightarrow$



$K=(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$

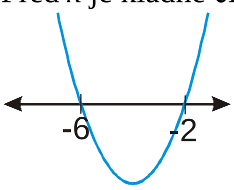
Př. 3: Vyřeš nerovnici: a) $x^2+8x+12<0$ $\qquad$ b) $-x^2+x+12\geq 0$.

a) $x^2+8x+12<0$

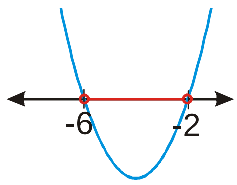
Hledáme nulové body: $(x+6)(x+2)=0$

$(x+6)=0 \Rightarrow x=-6$ $\qquad$ $(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body pod osou x $\Rightarrow$



$K=(-6,-2)$

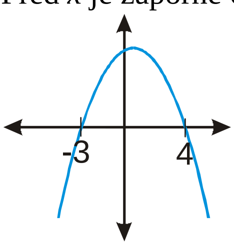
b) $-x^2+x+12\geq 0$.

Hledáme nulové body, nejde to rozkladem, nasadíme vzorec:

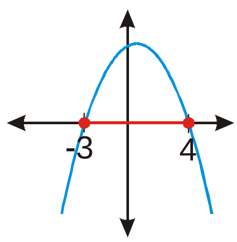
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 12}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 7}{-2}$$

$x_1=4$, $x_2=-3$

Před x je záporné číslo – „kopeček“.



Hledáme body nad nebo na ose x $\Rightarrow$



$K=\langle -3,4\rangle$

Př. 4: Vyřeš nerovnici:

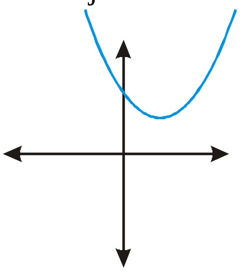
a) $x^2+x+3\le 0$ b) $-x^2-2x-7<0$ c) $2x^2+x+8>0$

a) $x^2+x+3\le 0$

Hledáme nulové body, zkusíme vzorec:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$ $\Rightarrow$ **rovnice** nemá řešení $\Rightarrow$ graf neprochází přes osu x (ale rozhodně to ještě neznamená, že by řešení nemohla mít nerovnice).

Před x je kladné číslo – „ďolík“



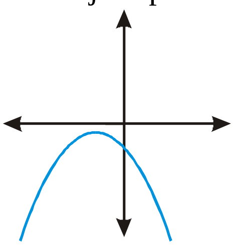
Hledáme body pod nebo na ose x $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

b) $-x^2-2x-7<0$

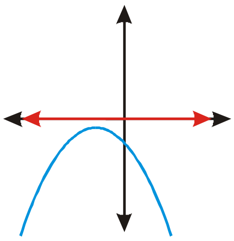
Hledáme nulové body, zkusíme vzorec:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot(-7)}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{2\pm\sqrt{-24}}{-2}$ $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení $\Rightarrow$ graf neprochází přes osu x (ale rozhodně to ještě neznamená, že by řešení nemohla mít nerovnice).

Před x je záporné číslo – „kopeček“



Hledám body pod osou x $\Rightarrow$



$K=R$

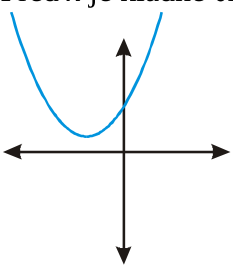
Je vidět, že fakt, že rovnice nemá řešení, nic neříká o existenci řešení nerovnice.

c) $2x^2+x+8>0$

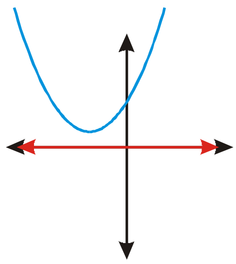
Hledáme nulové body, zkusíme vzorec:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-63}}{4}$ $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení $\Rightarrow$ graf neprochází přes osu x(ale rozhodně to ještě neznamená, že by řešení nemohla mít nerovnice).

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



$\Rightarrow$ Hledáme body nad osou x $\Rightarrow$



$K = R$

Pedagogická poznámka: Je potřeba, aby předchozí příklad řešili studenti sami. Zatímco bod a) vyřeší všichni dobře, bod b) mají prakticky všichni špatně. Studentskému uvažování dobře odpovídá fakt, že studenti přestanou velmi rychle rozlišovat mezi řešením kvadratické rovnice (které provádějí pouze kvůli získání průsečíků grafu s osou *x* a o řešení nerovnice ještě zdaleka nerozhodne) a řešením nerovnice (kde podle obrázku najdou množinu hledaných řešení). Bod a) tak vyřeší tím, že napíšou $K = \emptyset$ hned, jak zjistí, že kvadratická rovnice nemá žádné řešení, u bodu b) takový přístup samozřejmě selže.
Neříkám studentům ihned, kde udělali chybu, jenom jim připomínám, aby si dosazením libovolného čísla vyzkoušeli, že nerovnice řešení má, a uvědomili, co vlastně při řešení rovnice spočítali.
Myslím, že jde o jedno z míst, kde je krásně vidět, jaký význam má, když si studenti při počítání uvědomují, co vlastně dělají.

Př. 5: Vyřeš nerovnici:

a) $2x^2 - x - 6 < 0$ b) $x^2 - x - 1 \geq 0$

c) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ d) $x^2 + 8x + 16 \geq 0$

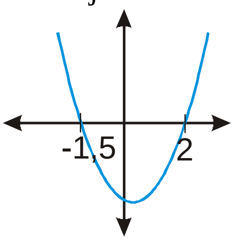
a) $2x^2 - x - 6 < 0$

Hledáme nulové body, nejde to rozkladem, nasadíme vzorec:

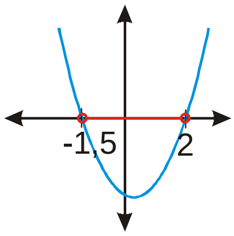
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2(-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1,5$

Před *x* je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body pod osou *x* $\Rightarrow$



$K = \langle -1,5; 2 \rangle$

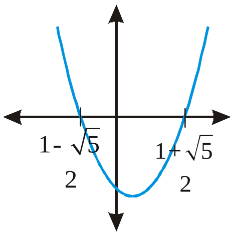
b) $x^2 - x - 1 \geq 0$

Hledáme nulové body, nejde to rozkladem, nasadíme vzorec:

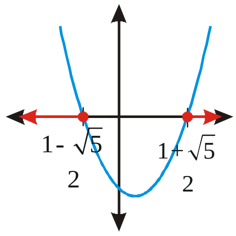
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Před *x* je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body nad nebo na ose x $\Rightarrow$



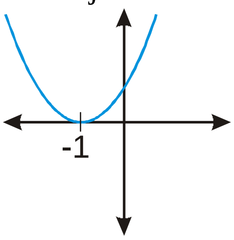
$$K = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

c) $x^2 + 2x + 1 \le 0$

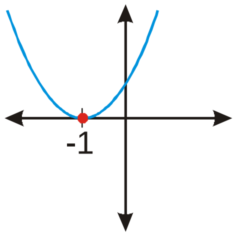
Hledáme nulové body: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2 \le 0$

$x_1 = x_2 = -1$

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body pod nebo na ose x $\Rightarrow$



$K = \{-1\}$

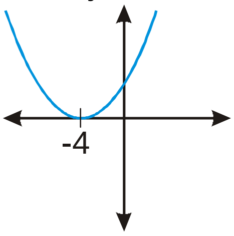
d) $x^2 + 8x + 16 \ge 0$

Hledáme nulové body, zkusíme vzorec:

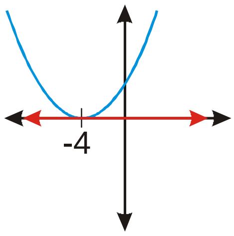
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2}$$

$x_1 = x_2 = -4$

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body nad nebo na ose x $\Rightarrow$



$K = R$

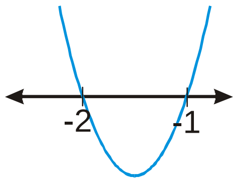
Pedagogická poznámka: U bodu b) mají někteří studenti problémy s odmocninou (a ke slovu přichází evergreen, že odmocniny jsou stejně dobrá čísla jako cokoliv jiného). Bod c) je pak problematický kvůli tomu, že pro nakreslení paraboly mají studenti najednou jediný průsečík. V případě, že si opravdu neví rady, radím jim, aby si graf nakreslili tak, jak ho kreslí, když je zadáním nakreslit graf funkce (jinak jde o typickou ukázku toho, jak nevidí, že dělají pořád to samé).

Pedagogická poznámka: S následujícími příklady je problém. Pokud necháte studenty počítat předchozí část hodiny samostatně, příklady 6 a 7 už většina z nich nestihne.

Počet předchozích příkladů však není možné příliš zmenšovat pokud mají studenti metodu zažít. Nezbývá než je nechat na nějaký zbytek nebo příští hodinu.

Př. 6: Najdi alespoň jednu kvadratickou nerovnici, jejímž řešením je interval $(-2;-1)$.

Krajní body intervalu odpovídají kořenům kvadratické rovnice: $\Rightarrow$ kvadratická rovnice v součinovém tvaru $(x+2)(x+1)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2=0$.



Funkce $y=x^2+3x+2$ má tvar „ďolíku“

$\Rightarrow$ interval $(-2;-1)$ odpovídá části grafu, která je pod osou x $\Rightarrow$ hledanou nerovnicí je například $x^2+3x+2<0$.

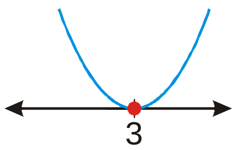
Př. 7: Rozhodni, které z následujících množin nemohou být řešením kvadratické nerovnice:

a) $K=\{3\}$ b) $K=(-2;\infty)$ c) $K=R-\{\pi\}$

d) $K=\left(-\infty;\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{3};\infty\right)$ e) $K=\langle 3;4)$

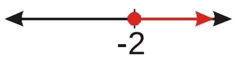
Množiny, které můžeme získat pomocí paraboly, mohou být řešením některé kvadratické nerovnice.

a) $K=\{3\}$



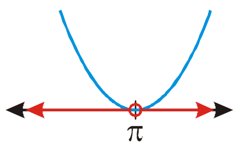
Parabola se dotýká osy x jedním bodem $\Rightarrow$ množina $K=\{3\}$ může být řešením kvadratické nerovnice .

b) $K=(-2;\infty)$



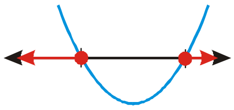
Tuto množinu nemůže získat pomocí paraboly $\Rightarrow$ množina $K=(-2;\infty)$ nemůže být řešením kvadratické nerovnice.

c) $K=R-\{\pi\}$



Podobný případ jako v bodě a) $\Rightarrow$ množina $K=R-\{\pi\}$ může být řešením kvadratické nerovnice.

d) $K=\left(-\infty;\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{3};\infty\right)$

Parabola se protíná s osou x ve dvou bodech $\sqrt{2}$, $\frac{7}{3}$  $\Rightarrow$ množina $K = \left(-\infty; \sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{3}; \infty\right)$ může být řešením kvadratické nerovnice.

e) $K = \langle 3; 4)$

Mohl by to být opak předchozího příkladu, ale v množina $K = \langle 3; 4)$ obsahuje pouze jeden hraniční bod $\Rightarrow$ množina $K = \langle 3; 4)$ nemůže být řešením kvadratické nerovnice.

Př. 8: Petáková:
strana 14/cvičení 17 a) b) d) f) g) i) j)

Shrnutí: Řešení kvadratické nerovnice je dáno tvarem grafu a kořeny odpovídající kvadratické rovnice.