

2.5.7 Vzorec pro řešení obecné kvadratické rovnice

Předpoklady: 1101, 2501, 2502, 2506

Vrátíme se k obecné kvadratické rovnici: $ax^2 + bx + c = 0$.

Vzorec pro kořeny známe: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Kde se vzal?

Zkusíme nejdříve konkrétní rovnici: $x^2 - 4x + 3 = 0$. Chceme výsledek ve tvaru: $x = \dots$, problém - x je v rovnici dvakrát.

Už jsme ho řešili u funkcí, zkusíme to stejně.

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1 = 0.$$

$(x - 2)^2 - 1 = 0$ - takové rovnice jsme řešili. Stačí, když závorku budeme vnímat jako jediné číslo: $(x - 2)^2 = 1$.

$$(x - 2) = \pm \sqrt{1}$$

Dopočítáme x :

$$x_1: (x_1 - 2) = 1 \Rightarrow x_1 - 2 = 1 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$x_2: (x_2 - 2) = -1 \Rightarrow x_2 - 2 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$K = \{1; 3\}$$

Pedagogická poznámka: Doplnění na čtverec provádějí v předchozím postupu samozřejmě studenti sami a já při tom stíhám ty, kteří to nedokážou.

Př. 1: Ověř předchozí výsledek dosazením do rovnice.

$$x = 1: x^2 - 4x + 3 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$x = 3: x^2 - 4x + 3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$$

Výsledek je správný, určitě by to stejně vyšlo i pomocí vzorce.

Př. 2: Zopakuj předchozí postup pro vyřešení kvadratické rovnice pro konkrétní rovnici $2x^2 - 4x - 16 = 0$ a pro rovnici v obecném tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$. Příklad řeš po jednotlivých krocích do dvou sloupců tak, aby jednotlivé kroky byly vedle sebe.

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

Vytkneme dvojku:

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$2(x^2 - 2x - 8) = 0 \quad /: 2$$

Doplníme na čtverec:

$$x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vytkneme a :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \quad /: a \text{ (jde to, víme } a \neq 0)$$

Doplníme na čtverec:

$$(x-1)^2 - 9 = 0$$

Odmocníme pravou stranu:

$$(x-1)^2 = 9$$

$$(x-1) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Dopočteme kořeny:

$$x_1 - 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 - 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$K = \{-2; 4\}$$

$$x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Teď bychom chtěli udělat odmocninu, ale to můžeme jenom u nezáporných čísel \Rightarrow musí

platit $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$. Jmenovatel zlomku je

druhá mocnina $4a^2 = (2a)^2$, záleží pouze na výrazu v čitateli (diskriminantu)

$$b^2 - 4ac = D > 0.$$

Ostatní možnosti rozebereme potom:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$K = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení předchozího příkladu kontrolujeme výsledky po jednotlivých krocích. Chci po studentech, aby nepočítali konkrétní rovnici najednou, ale vždy udělali pouze jeden krok, který poté provedou s obecnou rovnicí.

Ještě rozebereme všechny možnosti při odmocňování diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

Měli bychom odmocnit záporné číslo (**nejde**)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \text{záporné číslo}$$

(**taky nejde**)

$$K = \emptyset$$

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

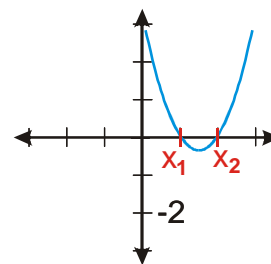
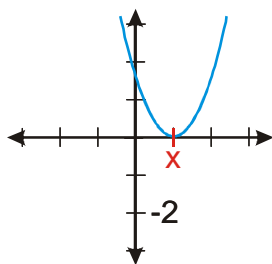
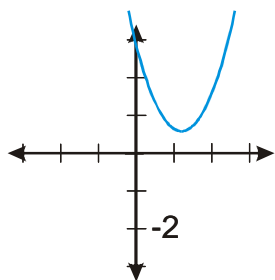
$$\text{Jediné řešení } K = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Přesně, jak jsme předpověděli pomocí grafů:



Pedagogická poznámka: Pokud je čas můžeme ukázat příklad 3 z hodiny 2505, kde je ihned vidět, že čítec zlomku, který způsobuje posun ve svislém směru, se rovná právě odvozenému diskriminantu.

Př. 3: Vyřeš kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$K = \{-1; 2\}$$

Př. 4: Vyřeš kvadratickou rovnici $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

$$3x^2 - 2x + 5 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$

Diskriminant je záporný \Rightarrow rovnice nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Všechny body následujícího příkladu nevyřeší nikdo. Zda je nechat na dobrovolnou domácí přípravu nebo na cvičení, záleží na času, který máte k dispozici.

Př. 5: Vyřeš kvadratickou rovnici dosazením do vzorce:

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $3x^2 - x + 4 = 0$

c) $0,15x^2 - 0,03x - 2 = 0$

d) $104x^2 - 166x + 66 = 0$

e) $4x^2 - 20x - 2 = 0$

f) $3x^2 - \pi x + 2 = 0$

g) $x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

h) $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$

i) $x^2 + x + x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

a)

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{-1} = 3 - \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{-1} = 3 + \sqrt{13}$$

$$K = \{3 - \sqrt{13}; 3 + \sqrt{13}\}$$

b)

$$3x^2 - x + 4 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{-47}}{6}$$

Diskriminant je záporný \Rightarrow rovnice nemá řešení. $K = \emptyset$

c)

$$0,15x^2 - 0,03x - 2 = 0 \quad / \cdot 100$$

$$15x^2 - 3x - 200 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-200)}}{2 \cdot 15} = \frac{3 \pm \sqrt{12009}}{30}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{12009}}{30} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{12009}}{30}$$

$$K = \left\{ \frac{3 - \sqrt{12009}}{30}; \frac{3 + \sqrt{12009}}{30} \right\}$$

d)

$$104x^2 - 166x + 66 = 0 \quad / : 2$$

$$52x^2 - 83x + 33 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{83 \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot 52 \cdot 33}}{2 \cdot 52} = \frac{83 \pm \sqrt{25}}{104} = \frac{83 \pm 5}{104}$$

$$x_1 = \frac{83 + 5}{104} = \frac{88}{104} = \frac{11}{13} \quad x_2 = \frac{83 - 5}{104} = \frac{78}{104} = \frac{3}{4}$$

$$K = \left\{ \frac{3}{4}; \frac{11}{13} \right\}$$

e)

$$4x^2 - 20x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{432}}{8} = \frac{20 \pm 12\sqrt{3}}{8} = \frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{10}{3} - 2\sqrt{3}; \frac{10}{3} + 2\sqrt{3} \right\}$$

f)

$$3x^2 - \pi x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\pi \pm \sqrt{(-\pi)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 24}}{6} = \frac{\pi \pm \sqrt{9,87 - 24}}{6}$$

Diskriminant je záporný \Rightarrow rovnice nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

g)

$$x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(1-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{2})}}{2 \cdot 1} = \frac{-1+2\sqrt{2} \pm \sqrt{1-4\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \frac{-1+2\sqrt{2} \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1+2\sqrt{2} \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+2\sqrt{2}+3}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \quad x_2 = \frac{-1+2\sqrt{2}-3}{2} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2} = -2+\sqrt{2}$$

$$K = \{-2+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}$$

h)

$$x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}}}{2 \cdot 1} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-4\sqrt{5}}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4(3-\sqrt{5})}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \quad x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$K = \{\sqrt{3} - \sqrt{3-\sqrt{5}}; \sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\}$$

i)

$$x^2 + x + x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-\sqrt{3} \pm \sqrt{1+2\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}}}{2} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{3} \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} \text{ - výraz pod odmocninou je určitě kladný, ale odmocnit ho}$$

neumíme. Zdá se, že jsme v koncích \Rightarrow zkusíme vnitřek odmocniny upravit jiným způsobem:

$$\sqrt{1+2\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

pod odmocninou je druhá mocnina. Že je závorka záporná nevádí, protože před odmocněním ji mocníme na druhou a tím z ní uděláme kladné číslo:

$$x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{3} \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{-1-\sqrt{3} \pm |1-\sqrt{3}|}{2} = \frac{-1-\sqrt{3} \pm (1-\sqrt{3})}{2} \text{ (absolutní hodnotu}$$

můžeme nahradit normální závorkou, protože je před ní \pm , které z jejího vnitřku udělá kladné i záporné číslo)

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2} = -1$$

$$K = \{-\sqrt{3}; -1\}$$

Pedagogická poznámka: Bylo by dobré, kdyby studenti pochopili vynechání absolutní hodnoty v posledním bodě. Pokud budou mít problémy, stačí demonstrace na

jednodušších číslech: $\pm|-2| \Rightarrow +|-2|=2$ a $-|-2|=-2$, což jsou stejná čísla, jako když rovnou napíšeme $\pm(-2)$.

Př. 6: Petáková:
strana 12/cvičení 4 c) e) h) i)
strana 12/cvičení 5

Shrnutí: Vzorec pro kořeny kvadratické rovnice vychází z doplnění na čtverec a převedení na ryze kvadratickou rovnici.