2.5.5 Grafy kvadratických funkcí s parametry

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 4x + c$. Jaký vliv má na graf hodnota parametru c?

$$y = x^2 - 4x + c = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + c = (x-2)^2 + c - 4$$

Př. 2: Nakresli graf funkce $y = x^2 + 4ax - b$. Urči hodnotu minima a pro které x ho funkce dosahuje.

$$y = x^2 + 4ax - b = x^2 + 2x \cdot 2a + (2a)^2 - (2a)^2 - b = (x+2a)^2 - 4a^2 - b$$

- $y = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow$ minimum v bodě $[-2; -1]$
- $y = (x+2a)^2 - 4a^2 - b \Rightarrow$ minimum v bodě $[-2a; -4a^2 - b]$

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = 2x^2 + bx + 4c$. Urči hodnotu minima a pro které x ho funkce dosahuje.

$$y = 2x^2 + bx + 4c = 2\left(x^2 + x\frac{b}{2}\right) + 4c = 2\left[x^2 + 2x\frac{b}{4} + \left(\frac{b}{4}\right)^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2\right] + 4c =$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{16}\right] + 4c = 2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + 4c - \frac{b^2}{8}$$

$x = -\frac{b}{4}$ $\quad$ $y = 4c - \frac{b^2}{8}$ $\quad$ (posunutí ve svislém směru)

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = ax^2 + bx + c$, kde $a > 0$. Urči pro jaké x má funkce minimum, urči jeho hodnotu. Rozhodni, pro které hodnoty x je funkce rostoucí a pro které klesající.

$$y = ax^2 + bx + c = y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$$

$$y = a\left[\overbrace{x^2 + 2x\frac{b}{2a}}^{x^2 + \frac{bx}{a}} + \overbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}^{0}\right] + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

předpis: $y = (x+1)^2 - 2$

minimum $[-1; -2]$

klesající $(-\infty; -1\rangle$

rostoucí $\langle -1; \infty)$

předpis: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ minimum $\left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right]$

klesající $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right\rangle$ rostoucí $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty\right)$

Př. 5: Je dána kvadratická funkce $y = bx^2 + 2acx + 3c$, kde $b < 0$. Rozhodni, pro které hodnoty x je funkce rostoucí a pro které klesající. Zdůvodni, zda má funkce minimum nebo maximum, a najdi jeho souřadnice.

$$y = bx^2 + 2acx + 3c = b\left(x^2 + 2x\frac{ac}{b}\right) + 3c = b\left[x^2 + 2x\frac{ac}{b} + \left(\frac{ac}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2\right] + 3c =$$

$$= b\left[\left(x + \frac{ac}{b}\right)^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}\right] + 3c = b\left(x + \frac{ac}{b}\right)^2 - \frac{a^2c^2}{b} + 3c = b\left(x + \frac{ac}{b}\right)^2 + \frac{3cb - a^2c^2}{b}$$

Maximum: $\left[-\frac{ac}{b}; \frac{3cb - a^2c^2}{b}\right]$. Rostoucí: $\left(-\infty; -\frac{ac}{b}\right\rangle$ a klesající: $\left\langle -\frac{ac}{b}; \infty\right)$.

Př. 6: Je dána kvadratická funkce $y = c^2x^2 - cbx - 2a$. Rozhodni, pro které hodnoty x je funkce rostoucí a pro které klesající. Zdůvodni, zda má funkce minimum nebo maximum, a najdi jeho souřadnice.

$$y = c^2x^2 - cbx - 2a = c^2\left(x^2 - \frac{b}{c}x\right) - 2a = c^2\left[x^2 - 2x\frac{b}{2c} + \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2\right] - 2a =$$

$$= c^2\left[\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2}{4c^2}\right] - 2a = c^2\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2a$$

Protože před x^2 je kladných parametr (c^2) funkce má tvar „ďolíku“ a má minimum v bodě $\left[\frac{b}{2c}; -\frac{b^2}{4} - 2a\right]$. Roste v intervalu $\left\langle -\frac{b}{2c}; \infty\right)$, klesá v intervalu $\left(-\infty; -\frac{b}{2c}\right\rangle$.

Př. 7: (BONUS) Vrať se k příkladu 4 a najdi číslo, které rozhoduje o tom, zda se graf kvadratické funkce protne s osou x. Jak souvisí toto číslo se vzorcem pro kořeny kvadratické rovnice?

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. O průsečíku s osou x rozhoduje číslo $c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Jsou dvě možnosti:

$a > 0 \Rightarrow$ graf má tvar „ďolíku“ a s osou x se protne pokud se minimum grafu posune dolů nebo zůstane v rovině. Tedy pokud platí: $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$, jmenovatel je kladný $\Rightarrow$ musí platit: $4ac - b^2 \le 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \ge 0$ - výraz, který má být nezáporný se rovná diskriminantu kvadratické rovnice, který rozhoduje o její řešitelnosti (se stejnou podmínkou)

$a < 0 \Rightarrow$ graf má tvar „kopečku“ a s osou x se protne pokud se minimum grafu posune nahoru nebo zůstane v rovině. Tedy pokud platí: $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$, jmenovatel je záporný $\Rightarrow$ musí platit: $4ac - b^2 \le 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \ge 0$ - stejná podmínka jako v případě $a > 0$