2.5.5 Grafy kvadratických funkcí s parametry

Předpoklady: 2501, 2502

Pedagogická poznámka: Hlavním cíle hodiny je kromě kreslení grafů a zopakování toho, jak jsou ovlivňovány hodnotami koeficientů, práce s písmenky a opakování staré pravdy, že se s písmenky pracuje skoro stejně jako s čísly.
Na první pohled se zdá logické zařadit hodinu hned za hodinu 2502 o doplňování na čtverec. Protože připravuje studenty na odvozování vzorce pro kořeny kvadratické rovnice probírám ji až později. Dalším důvodem je také kontrola toho, zda si studenti ještě pamatují doplnění na čtverec.

Pedagogická poznámka: První dva příklady studenti poměrně zvládají, pak mají čím dál větší problémy, které v naprosté většině případů pramení z toho, že nedodrží postup doplnění na čtverec. Snažím se je přesvědčit, že čím je situace složitější, tím opatrnější a pečlivější musí s naplňováním postupu být. V nejhorším případě si opět mohou pomoci vzorečkem.

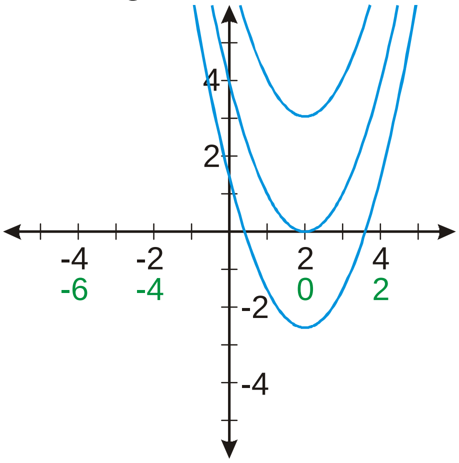
Pedagogická poznámka: Od třetího příkladu je rychlost postupu dost rozdílná. Rychlejším nechávám volnost, s pomalejšími počítáme napůl na tabuli a snažíme se dodělat alespoň příklad 4.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 4x + c$. Jaký vliv má na graf hodnota parametru c?

Budeme postupovat úplně stejně jako kdyby místo koeficientu c obsahoval předpis funkce normální číslo.

$y = x^2 - 4x + c = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + c = (x-2)^2 + c - 4$

Kreslíme graf:



Není možné rozhodnout, jak vysoko bude graf posunutý, dokud nebudeme znát přesnou hodnotu parametru c.

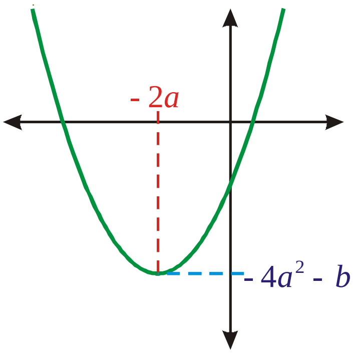
Př. 2: Nakresli graf funkce $y = x^2 + 4ax - b$. Urči hodnotu minima a pro které x ho funkce dosahuje.

Stejný postup jako v předchozím případě:

$$y = x^2 + 4ax - b = x^2 + 2x \cdot 2a + (2a)^2 - (2a)^2 - b = (x+2a)^2 - 4a^2 - b$$

Graf má tvar „ďolíku“, posunutí a souřadnice minima získáme porovnáním s konkrétní funkcí:

- $y = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow$ minimum v bodě $[-2; -1]$
- $y = (x+2a)^2 - 4a^2 - b \Rightarrow$ minimum v bodě $[-2a; -4a^2 - b]$



Př. 3: Nakresli graf funkce $y = 2x^2 + bx + 4c$. Urči hodnotu minima a pro které x ho funkce dosahuje.

Stejný postup jako v předchozím případě:

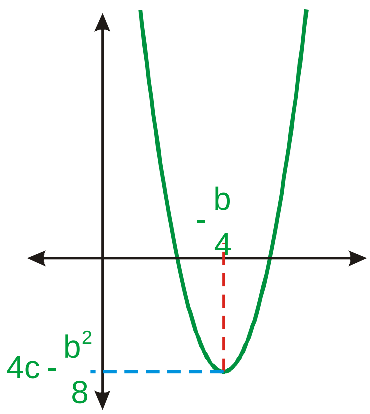
$$y = 2x^2 + bx + 4c = 2\left(x^2 + x\frac{b}{2}\right) + 4c = 2\left[x^2 + 2x\frac{b}{4} + \left(\frac{b}{4}\right)^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2\right] + 4c =$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{16}\right] + 4c = 2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + 4c - \frac{b^2}{8}$$

Teď už víme o grafu jenom to, že má tvar zúženého „ďolíku“. Jeho vodorovné i svislé posunutí závisí na konkrétních hodnotách parametrů b a c.

Souřadnice minima: $x = -\frac{b}{4}$ (aby v závorce, kterou umocňujeme byla nula, $(x+1)^2$, znamená minimum pro $x = -1$)

$y = 4c - \frac{b^2}{8}$ (posunutí ve svislém směru)



Př. 4: Nakresli graf funkce $y = ax^2 + bx + c$, kde $a > 0$. Urči, pro jaké x má funkce minimum, a urči jeho hodnotu. Rozhodni, pro které hodnoty x je funkce rostoucí a pro které klesající.

Stejný příklad jako předchozí: $y = ax^2 + bx + c = y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$

$$y = a\left[\overbrace{x^2 + 2x\frac{b}{2a}}^{x^2+\frac{bx}{a}} + \overbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}^{0}\right] + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$A^2 + 2AB \ + \ B^2 \qquad = \qquad (A+B)^2$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

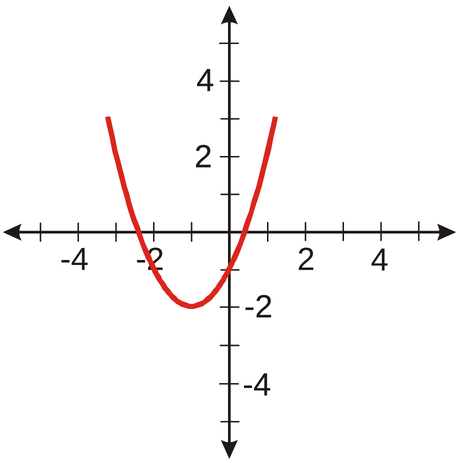
Jak z výsledku upravování něco zjistíme? Srovnáme s funkcí s konkrétními čísly.

předpis: $y = (x+1)^2 - 2$

minimum $[-1;-2]$

klesající $(-\infty;-1\rangle$

rostoucí $\langle -1;\infty)$

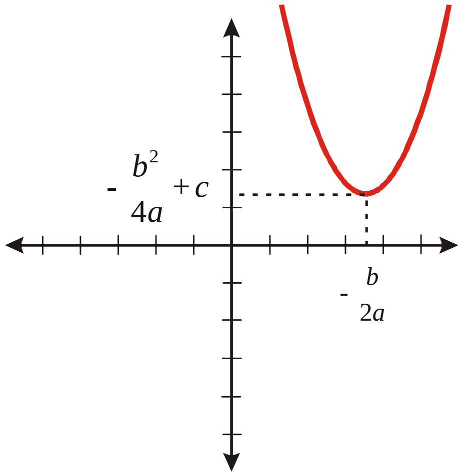


předpis: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

minimum $\left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right]$

klesající $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right\rangle$

rostoucí $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty\right)$



Je mnoho možností, jak nakreslit obrázek. Neznáme hodnoty parametrů a, b, c, takže nevíme kam graf posunout. Víme jen, že půjde o „ďolík“ (protože $a > 0$).

Př. 5: Je dána kvadratická funkce $y = bx^2 + 2acx + 3c$, kde $b < 0$. Rozhodni, pro které hodnoty x je funkce rostoucí a pro které klesající. Zdůvodni, zda má funkce minimum nebo maximum, a najdi jeho souřadnice.

Příklad je prakticky totožný s příkladem 4. Upravíme si předpis funkce doplněním na čtverec. Protože koeficient před x^2 je záporný, funkce má tvar kopečku a má maximum.

$$y = bx^2 + 2acx + 3c = b\left(x^2 + 2x\frac{ac}{b}\right) + 3c = b\left[x^2 + 2x\frac{ac}{b} + \left(\frac{ac}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2\right] + 3c =$$

$$= b\left[\left(x + \frac{ac}{b}\right)^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}\right] + 3c = b\left(x + \frac{ac}{b}\right)^2 - \frac{a^2c^2}{b} + 3c = b\left(x + \frac{ac}{b}\right)^2 + \frac{3cb - a^2c^2}{b}$$

Maximum funkce je v bodě $\left[-\frac{ac}{b}; \frac{3cb - a^2c^2}{b}\right]$.

Funkce je rostoucí v intervalu $\left(-\infty; -\frac{ac}{b}\right\rangle$ a klesající v intervalu $\left\langle -\frac{ac}{b}; \infty\right)$.

Pedagogická poznámka: Častou chybou je přidávání dvojky do lineárního členu (zřejmě nápodoba předchozího příkladu). Setkal jsem se také s úpravou $y = bx^2 + 2acx + 3c = b\left(x^2 - 2x\frac{ac}{b}\right) + 3c$, která byla zdůvodňována tím, že pokud je b záporné číslo, musí se s ním objevit mínus. Pomáhá pokus s konkrétní hodnotou: $y = (-2)x^2 + 2acx + 3c = (-2)\left(x^2 + 2x\frac{ac}{(-2)}\right) + 3c$.

Př. 6: Je dána kvadratická funkce $y = c^2x^2 - cbx - 2a$. Rozhodni, pro které hodnoty x je funkce rostoucí a pro které klesající. Zdůvodni, zda má funkce minimum nebo maximum, a najdi jeho souřadnice.

Stejný postup jako v předchozích případech:

$$y = c^2x^2 - cbx - 2a = c^2\left(x^2 - \frac{b}{c}x\right) - 2a = c^2\left[x^2 - 2x\frac{b}{2c} + \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2\right] - 2a =$$

$$= c^2\left[\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2}{4c^2}\right] - 2a = c^2\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2a$$

Protože před x^2 je kladných parametr (c^2) funkce má tvar „ďolíku“ a má minimum v bodě $\left[\frac{b}{2c}; -\frac{b^2}{4} - 2a\right]$.

Roste v intervalu $\left\langle -\frac{b}{2c}; \infty\right)$, klesá v intervalu $\left(-\infty; -\frac{b}{2c}\right\rangle$.

Př. 7: (BONUS) Vrať se k příkladu 4 a najdi číslo, které rozhoduje o tom, zda se graf kvadratické funkce protne s osou *x*. Jak souvisí toto číslo se vzorcem pro kořeny kvadratické rovnice?

Ve třetím příkladu jsme předpis funkce $y = ax^2 + bx + c$ upravili do tvaru $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. O průsečíku s osou *x* (a tedy i řešitelnosti odpovídající kvadratické rovnice) rozhoduje posunutí ve svislém směru a tedy číslo $c - \frac{b^2}{4a}$.

Upravíme výraz do jediného zlomku: $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Dvě možnosti:

- $a > 0 \Rightarrow$ graf má tvar „ďolíku“ a s osou *x* se protne pokud se minimum grafu posune dolů nebo zůstane v rovině. Tedy pokud platí: $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$, jmenovatel je kladný $\Rightarrow$ musí platit: $4ac - b^2 \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$ - výraz, který má být nezáporný se rovná diskriminantu kvadratické rovnice, který rozhoduje o její řešitelnosti (se stejnou podmínkou)
- $a < 0 \Rightarrow$ graf má tvar „kopečku“ a s osou *x* se protne pokud se minimum grafu posune nahoru nebo zůstane v rovině. Tedy pokud platí: $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$, jmenovatel je záporný $\Rightarrow$ musí platit: $4ac - b^2 \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$ - stejná podmínka jako v případě $a > 0$

Shrnutí: Pokud se v předpisu kvadratické funkce vyskytují písmenka, postupujeme při jeho úpravě stejně, jako když obsahuje pouze čísla. Při kreslení grafu pak volíme odpovídající posunutí „libovolně“ v souladu s hodnotami, které můžeme dosadit.