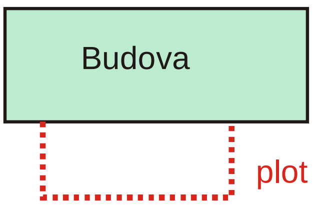
2.5.4 Další úlohy s kvadratickými funkcemi

Předpoklady: 2501, 2502

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi ty méně organizované. Společně řešíme příklad 1, při dalším počítání se třída rozpadá. Já řeším příklady s pomalejší částí třídy, tak aby co nejvíce práce odvedli studenti a já vysvětloval co nejméně. Rychlejší studenti na nás nečekají a prokládají si příklady ze zadání příklady z Petákové.

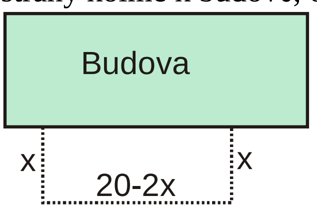
Př. 1: Zemědělec chce postavit výběh pro kuřata ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu výběhu bude tvořit hospodářská budova. Celkem má k dispozici 20 m pletiva. Jaké mají být rozměry výběhu, aby jeho plocha byla co největší?

Nakreslíme obrázek situace:



Kdyby jednu stranu plotu nenahrazovala stěna budovy, byl by nejvýhodnějším tvarem čtverec. Pokud budeme jeden z rozměrů obdélníku příliš zvětšovat obdélník se zúží a jeho obsah se bude blížit k nule $\Rightarrow$ měl by existovat kompromis, pro který bude obsah největší.

Zkusíme určit plochu výběhu v závislosti na jednom z rozměrů obdélníka, třeba na délce strany kolmé k budově, označím si ji *x*:



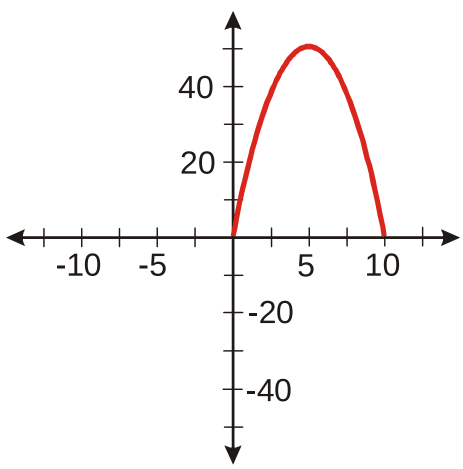
$S = ab = x(20-2x) = 20x - 2x^2$

Plocha výběhu je kvadratickou funkcí jedné ze stran – u kvadratické funkce může existovat maximum $\Rightarrow$ upravíme předpis z najdeme ho.

$y = 20x - 2x^2 = -2x^2 + 20x = -2(x^2 - 10x) = -2(x^2 - 2x\cdot 5 + 5^2 - 5^2) = -2\left[(x-5)^2 - 25\right]$

$y = -2(x-5)^2 + 50$

Funkce dosahuje maxima pro $x = 5$, hodnota maxima je 50.



Zemědělec musí postavit výběh ve tvaru obdélníku o rozměrech 5 x 10 m.

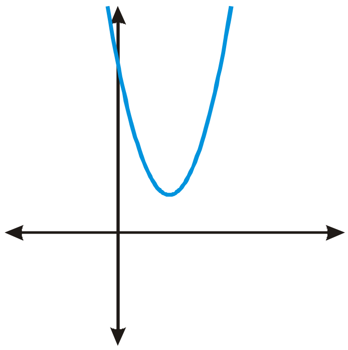
Pedagogická poznámka: Nechte studenty samostatně nakreslit obrázek, jestli vůbec rozumí zadání. Příklad je pro studenty určitě nezvyklý, není pravděpodobné, že by ho někdo vyřešil samostatně. Proto příliš dlouho s radou nečekám, ale v místech, kde je v řešení vynechaná řádky, vždy chvilku počkám, aby měli studenti šanci dovést řešení do konce.

Poznámka: Předchozí příklad je ukázkou úlohy na hledání extrému (největší nebo nejmenší hodnoty). Každá taková úloha se skládá ze dvou částí. V první části musíme najít funkci, která v závislosti na zvolené proměnné udává velikost veličiny, která nás zajímá. Tato část je obtížnější, nejedná se o čistě matematickou záležitost a musíme prokázat orientaci v konkrétním problému. V druhé části pak pouze hledáme maximum nebo minimum nalezené funkce, což je čistě matematický problém, který zejména po probrání derivací ve čtvrtém ročníku nepatří mezi příliš obtížné.

Př. 2: Na obrázku je v soustavě souřadnic, která není očíslována a nemusí mít stejné měřítko na obou osách, nakreslen graf kvadratické funkce. Která z následujících kvadratických funkcí mohou odpovídat tomuto grafu? Každé rozhodnutí zdůvodni.

a) $y=(x-2)^2-4$ b) $y=-x^2+2x-3$ c) $y=2(x-\pi)^2+4$

d) $y=0,5x^2+x+2$ e) $y=x^2-4x+2$



a) $y=(x-2)^2-4$ neodpovídá grafu, minimum této funkce je posunuto doprava, ale pod osu x

b) $y=-x^2+2x-3$ neodpovídá grafu, před x^2 je záporné číslo $\Rightarrow$ graf funkce má tvar „kopečku“

c) $y=2(x-\pi)^2+4$ odpovídá grafu, minimum této funkce je posunuto doprava nad osu x

d) $y=0,5x^2+x+2$ neodpovídá graf, minimum této funkce je posunuto doleva

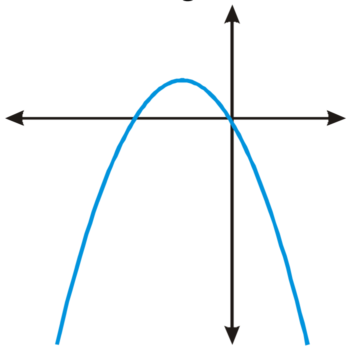
e) $y=x^2-4x+2$ minimum funkce je posunuto doprava, musíme zjistit, zda je posunuto nahoru nebo dolů $\Rightarrow$ musíme doplnit předpis funkce na čtverec:

$y=x^2-4x+2=x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2+2=(x-2)^2-2 \Rightarrow$ funkce neodpovídá obrázku, minimum je posunuto dolů

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde o vyřazování nesprávných možností. Před společnou kontrolou se bavíme o nejlepší strategii řešení. Snažím se dovést studenty k tomu, že některé možnosti můžeme vyloučit ihned, jiné potřebují podrobnější rozbor a proto se vyplatí postupovat ve dvou průchodech. V prvním průchodu vyškrtat to jasné a v druhém se podrobněji zabývat pouze tím, co zbude.

Pedagogická poznámka: Předchozí a následující příklad se snaží řešit obavy studentů z nejednoznačného kreslení přibližných grafů. V mnoha situacích stačí graf přibližně načrtnout a nezdržovat se kreslením, což studenti dělají jenom zřídka (podobně se vyhýbají všem nejednoznačným úlohám).

Př. 3: Na obrázku je v soustavě souřadnic, která není očíslována a nemusí mít stejné měřítko na obou osách, nakreslen graf kvadratické funkce. Napiš předpis libovolné kvadratické funkce, která odpovídá tomuto grafu. Jaké hodnoty mohou mít koeficienty v předpisu funkce $y = A(x-B)^2 + C$, aby funkce odpovídala nakreslenému grafu?



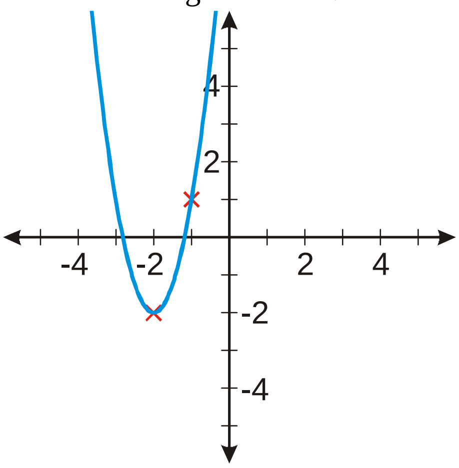
Grafu odpovídá například funkce $y = -2(x+1)^2 + 1$ (graf musí být převrácený do tvaru „kopečku“, maximum musí být posunuto doleva a nahoru).

Možné hodnoty koeficientů v předpisu: $y = A(x-B)^2 + C$:

- $A < 0$ - převrácení grafu do tvaru „kopečku“
- $B < 0$ - maximum musí být posunuto doprava (například pro $B = -1$ získáme $y = A[x-(-1)]^2 + C = A(x+1)^2 + C$)
- $C > 0$ - maximum musíme posunout nahoru

Př. 4: Urči předpis kvadratické funkce, která má minimum v bodě $[-2;-2]$ a prochází bodem $[-1;1]$.

Nakreslíme si graf funkce:



Z polohy minima můžeme určit posunutí funkce ve svislém a vodorovné směru $\Rightarrow$ hledaná funkce má tvar: $y = A(x+2)^2 - 2$.

Konstanta *A* určuje zeštíhlení grafu. Když se přesuneme z bodu $[-2;-2]$ do bodu $[-1;1]$ posuneme se z minima o jedna do prava $\Rightarrow$ hodnota *y* by se měla zvětšit o jedna. Z *y*-ových souřadnic obou zadaných bodů je vidět, že se *y*-ová hodnota změnila o 3 $\Rightarrow$ funkce roste třikrát rychleji než funkce $y=(x+2)^2-2$ $\Rightarrow$ hledaná funkce má předpis $y=3(x+2)^2-2$.

Dodatek: Hodnotu koeficientu *A* můžeme v předchozím příkladu také dopočítat (pro některé studenty je to pochopitelnější a tento postup je obecně často použitelnější:
Funkce má tvar $y=A(x+2)^2-2$ prochází bodem $[-1;1]$ $\Rightarrow$ bod $[-1;1]$ musí vyhovovat předpisu: $1=A(-1+2)^2-2$
$3=A\cdot 1^2 \;\Rightarrow\; A=3$.

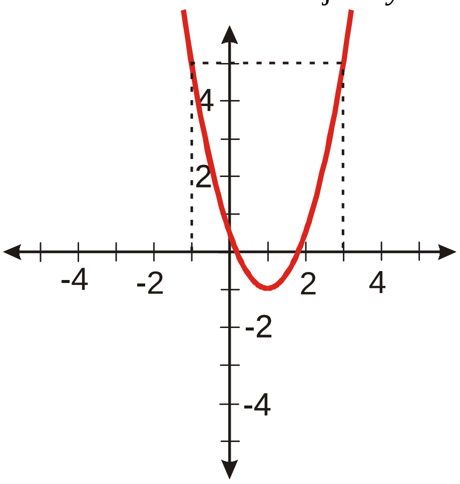
Pedagogická poznámka: Postup uvedený v dodatku ukazuji celé třídě při kontrole. Pokud mají rychlejší studenti příklad špatně, chci po nich, aby nakreslili funkci podle svého zadání a porovnali výsledek kreslení se zadáním příkladu. Jde o to, aby se naučili hledat chyby a aby se ukázalo, jestli jsou schopni dodržet postup kreslení, nebo jej někde po cestě znásilní, aby získali graf ze zadání a měli pocit, že příklad vyřešili dobře.

Př. 5: Urči předpis kvadratické funkce, pro kterou platí: $H(f)=\langle -1;\infty)$, $f(-1)=f(3)=5$.

Nejdříve si načrtneme graf funkce, z grafu pak určíme předpis funkce ve tvaru $y=K(x-L)+M$.

$H(f)=\langle -1;\infty)$ - hledaná funkce má tvar „ďolíku“ hodnota minima je –1.

$f(-1)=f(3)=5$ - získáme dva body grafu, protože oba mají i stejnou *y*-ovou hodnotu, můžeme určit i *x*-ovou souřadnici minima. Parabola je osově souměrná podle svislé přímky procházející minimem. *x*-ová souřadnice minima tak bude ležet ve středu mezi *x*-ovými souřadnicemi bodů se stejnou *y*-ovou souřadnicí.



Ze souřadnic minima můžeme ihned určit koeficienty *L* a *M*: $y=K(x-1)^2-1$

Koeficient *K* určíme dosazením jednoho ze zadaných bodů, například $[-1;5]$.

$5=K((-1)-1)^2-1$ $\qquad 6=K(-2)^2$ $\qquad 6=4K$

$K = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}(x-1)^2 - 1$

$y = \frac{3}{2}(x-1)^2 - 1 = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1) - 1 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

Zadaná funkce je $y = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$.

Pedagogická poznámka: S příkladem mají větší problémy Ti, kteří počítají dopředu a nezaregistrují druhý způsob vypočtení předchozí příkladu dosazením.

Př. 6: Urči předpis kvadratické funkce jejíž graf prochází body $A[1;0]$, $B\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $C[5;4]$.

O žádném z bodů nevíme, že by byl maximem nebo minimem, žádné dva body nemají stejnou *y*-ovou souřadnici $\Rightarrow$ nemáme žádnou speciální stopu $\Rightarrow$ víme, že funkce má předpis $y = ax^2 + bx + c$ $\Rightarrow$ musíme určit tři konstanty $\Rightarrow$ potřebujeme tři rovnice, které získáme dosazením tří bodů.

bod $A[1;0]$: $0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 0$

bod $B\left[0;\frac{3}{2}\right]$: $\frac{3}{2} = 0 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

bod $C[5;4]$: $4 = a \cdot 5^2 + 5 \cdot 1 + c \Rightarrow 25a + 5b + c = 4$

Dosadíme za *c* do první a druhé rovnice:

$a + b + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2a + 2b = -3 \Rightarrow 2b = -3 - 2a$

$25a + 5b + \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow 50a + 10b = 5 \quad / : 5 \Rightarrow 10a + 2b = 1$

Dosadíme za $2b$ do druhé rovnice: $10a - 3 - 2a = 1$

$8a = 4$

$a = \frac{1}{2}$

$2b = -3 - 2a = -3 - 2\frac{1}{2} = -4 \Rightarrow b = -2$

Hledaná funkce má předpis $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.

Pedagogická poznámka: Naprostá většina studentů, se snaží řešit příklad stejně jako předchozí – nakreslením grafu a dosazením do tvaru $y = A(x-B)^2 + C$. Pokud zbude čas povídáme si o tom, kdy je dobré zkusit přemýšlet o zcela jiné cestě výpočtu než se zdálo v prvním okamžiku.

Př. 7: Petáková:
strana 29/cvičení 46
strana 29/cvičení 48

strana 29/cvičení 50
strana 29/cvičení 51
strana 29/cvičení 52
strana 29/cvičení 53

Shrnutí: Předpisy kvadratických funkcí můžeme získat buď nakreslením grafu nebo dosazením známých bodů do obecného vyjádření.