

2.5.3 Kvadratické funkce s absolutní hodnotou

Předpoklady: 2501, 2503

Pedagogická poznámka: Hlavním smyslem hodiny není učit studenty něco nového. Naopak by si všichni měli uvědomit, že nic dalšího než to, co již umí (nebo by měli umět) k řešení příkladů nepotřebují. Nic víc než toto na začátku hodiny obvykle neříkám. I studenti sami jsou pak překvapeni, že dokáží následující příklady při troše důslednosti vyřešit sami.

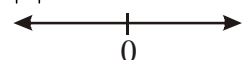
Pedagogická poznámka: Zadání příkladů je krátké, takže je stačí přepsat na tabuli a projektor používat spíše na postupné odkrývání řešení.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2|x|$.

Problém: předpis funkce obsahuje absolutní hodnotu.

Řešení: odstraníme ji pomocí intervalů, jako u funkcí s absolutní hodnotou.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x|: \quad x = 0$$


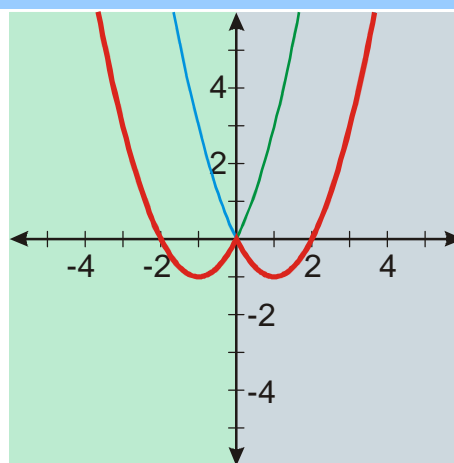
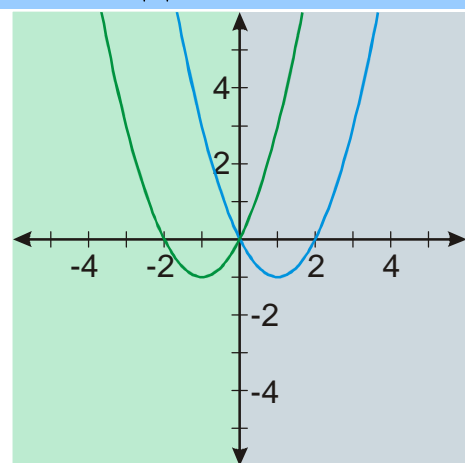
\Rightarrow dva intervaly

1) $x \in (-\infty; 0)$ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$$y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2(-x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

2) $x \in (0; \infty)$ $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$



Poznámka: Tento graf již známe u funkce $y = (|x| - 1)^2 - 1$. Můžeme si ukázat, že jde o stejné funkce i pomocí předpisu. Platí $x^2 = |x|^2$ (je jedno, zda znaménko zmizí už v absolutní hodnotě nebo až při umocňování). Předpis funkce pak můžeme upravit takto:

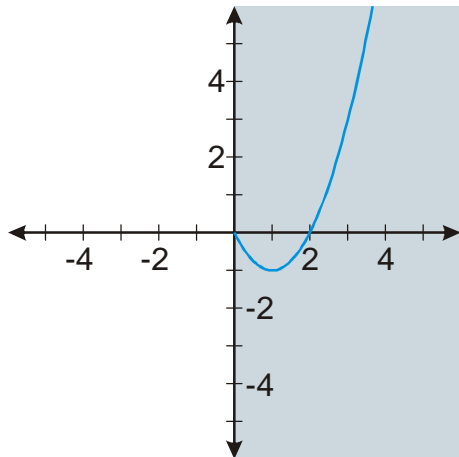
$$y = x^2 - 2|x| = |x|^2 - 2|x| + 1 - 1 = (|x| - 1)^2 - 1. \text{ Z toho je již jasné, proč jsou oba grafy stejné.}$$

Př. 2: Najdi způsob, jak s využitím vlastností funkce $y = x^2 - 2|x|$ nakreslit její graf bez nutnosti rozdělování definičního oboru na intervaly.

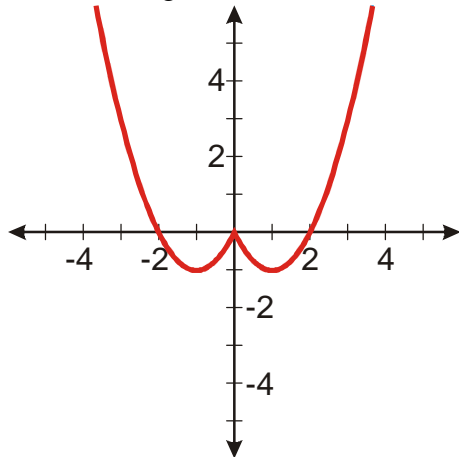
Z předpisu je jasné, že funkce $y = x^2 - 2|x|$ je sudá (skládá se ze dvou sudých funkcí $y = x^2$ a $y = |x|$) \Rightarrow stačí nakreslit její graf pro hodnoty $x \in \langle 0; \infty \rangle$ a graf pro záporné hodnoty musí být osově souměrný podle osy y .

Pro nezáporná čísla x platí: $y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2x$

Kreslíme graf funkce $y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = (x-1)^2 - 1 = f(x-1) + 1$, $f(x) = x^2$



Dokreslíme graf v osové souměrnosti podle osy y :

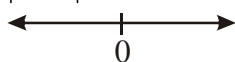


Př. 3: Nakresli graf funkce $y = x|x-2|$.

Stejný problém i stejné řešení jako předtím.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x-2|: x=2$$



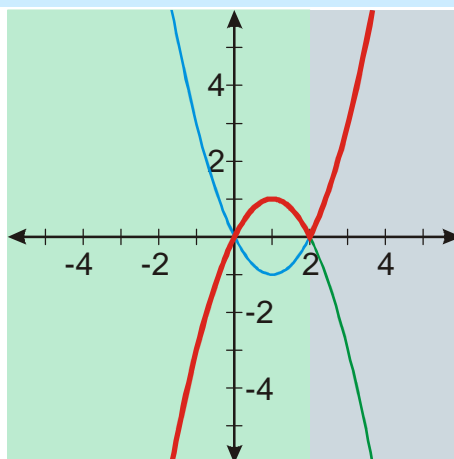
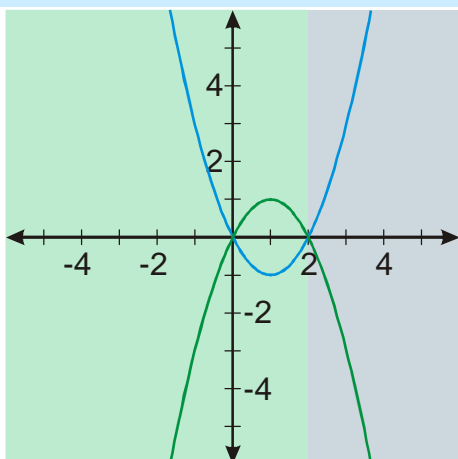
\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 2) \quad x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$$

$$y = x|x-2| = x(-x+2) = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1$$

$$2) x \in \langle 2; \infty \rangle \quad x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$y = x|x-2| = x(x-2) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$



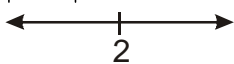
Pedagogická poznámka: Asi nejčastější chybou je rozdělení do intervalů podle nuly, které pak vyústí ve špatné vytažení výsledného grafu. Další mají problém s tím, že graf vychází z mínus nekonečna. Ukazujeme si na předpisu, že kvůli absolutní hodnotě jsou hodnoty funkce pro záporná x opravdu záporné.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2|x-2| + 1$.

Stejný problém i stejné řešení jako předchozí příklady.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x-2|: x=2$$



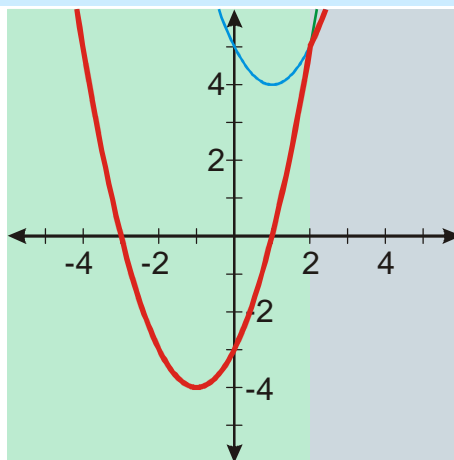
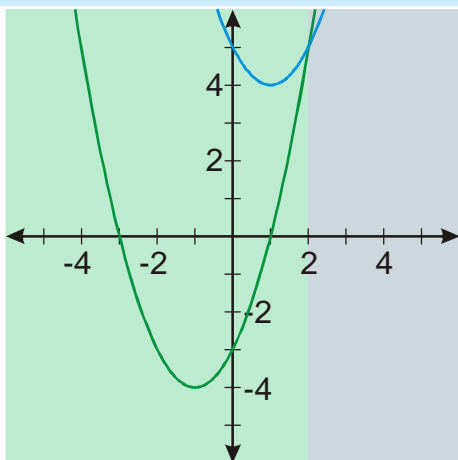
\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 2) \quad x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$$

$$y = x^2 - 2|x-2| + 1 = x^2 + 2(x-2) + 1 = x^2 + 2x - 4 + 1 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x+1)^2 - 4$$

$$2) x \in (2; \infty) \quad x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$y = x^2 - 2|x-2| + 1 = x^2 - 2(x-2) + 1 = x^2 - 2x + 4 + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 4$$

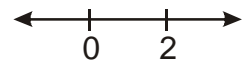


Př. 5: Nakresli graf funkce $y = x|2-x| + 2|x| - 2$.

Zjistíme nulové body absolutních hodnot:

$$|2-x|: x=2$$

$$|x|: x=0$$



\Rightarrow tři intervaly

$$1) x \in (-\infty; 0) \quad 2-x > 0 \Rightarrow |2-x| = 2-x \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = x|2-x| + 2|x| - 2 = x(2-x) + 2(-x) - 2 = 2x - x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2$$

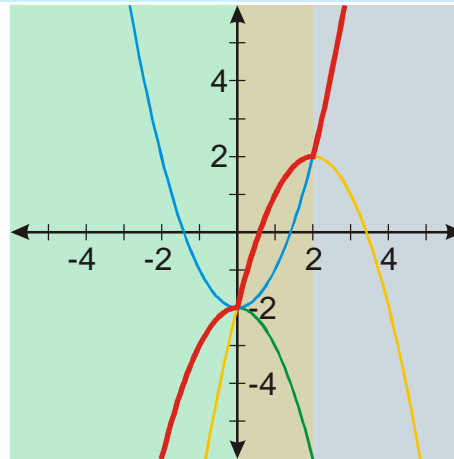
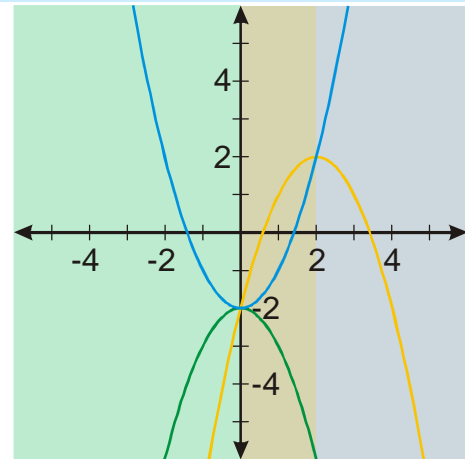
$$2) x \in \langle 0; 2 \rangle \quad 2-x > 0 \Rightarrow |2-x| = 2-x \quad x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = x|2-x| + 2|x| - 2 = x(2-x) + 2x - 2 = 2x - x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 4x - 2 =$$

$$= -(x^2 - 4x) - 2 = -(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) - 2 = -[(x-2)^2 - 4] - 2 = -(x-2)^2 + 2$$

$$3) x \in \langle 2; \infty \rangle \quad 2-x < 0 \Rightarrow |2-x| = -2+x \quad x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = x|2-x| + 2|x| - 2 = x(x-2) + 2x - 2 = x^2 - 2x + 2x - 2 = x^2 - 2$$



Př. 6: Petáková:

strana 29/cvičení 55 $g_2; g_4; h_3; k_1$

Shrnutí: Kreslení grafů kvadratických funkcí s absolutní hodnotou je zcela stejné jako kreslení grafů lineárních funkcí s absolutní hodnotou.