2.5.2 Úprava na kvadratický trojčlen

Předpoklady: 2501

Pedagogická poznámka: Ideální je pokud tato hodina vyjde na cvičení. Ze začátku dělají studenti chyby a je rozhodně snazší uhlídat studentů patnáct než třicet. Další kritické místo pak přichází na konci u vytýkání.

Pedagogická poznámka: Není moc pravděpodobné, že by se podařilo větší části třídy všechny příklady spočítat. Já osobně nechávám zbývající příklady do další hodiny.

Pedagogická poznámka: V této hodině se cvičí dvě věci: schopnost dodržování algoritmu a schopnost převádět zdánlivě nové problémy na ž zvládnutý příklad (samozřejmě se cvičí také schopnost pořádného zápisu). Říkám to studentům už na začátku hodiny, aby sami na sobě pozorovali, jak se jim v těchto dovednostech daří. Také mají větší šanci si všimnout, co dělají dobře.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2x$.

Problém – nejde přepsat na $y = f(x)$, v předpisu se x vyskytuje dvakrát.

Nápad: trojčlen $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$ - A se vyskytovala taky dvakrát, ale po použití vzorce už jenom jednou

Pokus: $\begin{array}{l} y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \\ \qquad\qquad A^2 - 2AB + B^2 \end{array}$ místo B musíme mít ve vzorci takové číslo, aby platilo: $2x \cdot číslo = 2x$, číslo je tedy jednička. Pokračujeme:

$\begin{array}{l} y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \cdot 1 + \\ \qquad\qquad A^2 - 2AB + B^2 \end{array}$ - musíme přidat 1^2, abychom měli člen odpovídající B^2

$\begin{array}{l} y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 \\ \qquad\qquad A^2 - 2AB + B^2 \end{array}$ - předpis funkce by se změnil, musíme 1^2 zase odečíst

$$y = x^2 - 2x = \overbrace{x^2 - 2x \cdot 1}^{x^2 - 2x} + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} = \left[x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 = (x-1)^2 - 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Teď už je to jednoduché: $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

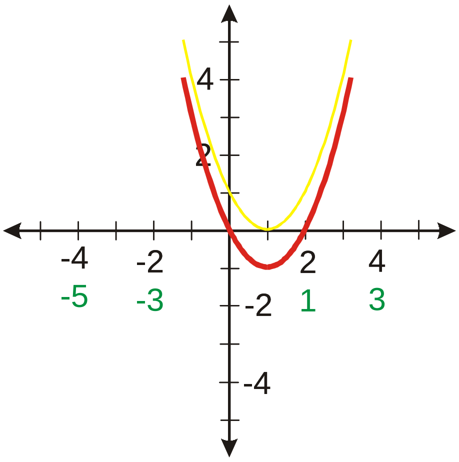
Platí: $y = (x-1)^2 - 1 = f(x-1) - 1$

Zvolíme x

Vypočteme $x-1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = (x-1)^2$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) - 1 = (x-1)^2 - 1$



Pedagogická poznámka: Studenti mají jen velmi malou šanci přijít na postup samostatně. Nenechávám je dlouho čekat, pak si řekneme v čem je problém a nabídnu jim vzoreček $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$. Potom ještě chvilku čekám a pak si příklad vyřešíme společně.

Tento postup se nazývá doplnění na čtverec. A patří do červených rámečků, protože ho budeme ještě mockrát potřebovat.

$$y = x^2 - 2x = \overbrace{x^2 - 2x \cdot 1}^{x^2 - 2x} \overbrace{+1^2 - 1^2}^{0} = \left[x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 = (x - 1)^2 - 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \qquad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \qquad = (A - B)^2$$

Př. 2: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 8x$

a)

$$y = x^2 + 4x = \overbrace{x^2 + 2x \cdot 2}^{x^2 + 4x} \overbrace{+2^2 - 2^2}^{0} = \left[x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 = (x + 2)^2 - 4$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad = \quad A^2 + 2AB + B^2 \qquad = (A + B)^2$$

b)

$$y = x^2 - 8x = \overbrace{x^2 - 2x \cdot 4}^{x^2 - 8x} \overbrace{+4^2 - 4^2}^{0} = \left[x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2\right] - 4^2 = (x - 4)^2 - 16$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad = \quad A^2 + 2AB + B^2 \qquad = (A + B)^2$$

Pedagogická poznámka: Studenti začnou velice záhy zkracovat zápis. Říkám jim, že to není na závadu, pokud mají kontrolu nad tím co dělají a pokud budou schopni se v případě problémů vrátit k postupnému výpočtu.

Př. 3: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 - 2x + 2$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 - 2x + 2 = \underbrace{\overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-2x} \cdot 1 + 1^2}_{A^2-2AB+B^2} \overbrace{-1^2 + 1^2}^{0} \ldots$$

$$y = x^2 - 2x + 2 = \overbrace{x^2 - 2x\cdot 1}^{x^2-2x} + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} + 2 = \left[x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Př. 4: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 - 6x + 3$ b) $y = x^2 + 4x + 3$

a)

$$y = x^2 - 6x + 3 = \overbrace{x^2 - 2x\cdot 3}^{x^2-6x} + \overbrace{3^2 - 3^2}^{0} + 3 = \left[x^2 - 2x\cdot 3 + 3^2\right] - 3^2 + 3 = (x-3)^2 - 6$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

b)

$$y = x^2 + 4x + 3 = \overbrace{x^2 + 2x\cdot 2}^{x^2+4x} + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0} + 3 = \left[x^2 + 2x\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 + 2AB + B^2 \quad = (A+B)^2$$

Pedagogická poznámka: Dvojce předchozích dvou příkladů je důležitá. Studenti, kteří nechápou důvody odvozování a pracují mechanicky většinou druhý příklad řeší takto:

$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2x\cdot 2 + 3^2 - 3^2 + 3 = \ldots$ Trojky tam dávají proto, že oba příklady mají absolutní člen roven třem. Že přidávají člen B^2 už zapomněli.

Př. 5: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 - 4x + 4$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 - 4x + 4 = \overbrace{x^2 - 2x\cdot 2}^{x^2-4x} + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0} + 4 = \left[x^2 - 2x\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 + 4 = (x-2)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Př. 6: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 + 3x - 1$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 + 3x - 1 = \overbrace{x^2 + 2x\cdot \frac{3}{2}}^{x^2+3x} + \overbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}^{0} - 1 = \left[x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - \frac{9}{4} - 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 + 2AB + B^2 \quad = (A+B)^2$$

Př. 7: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 - x + 1$ b) $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

a)

$$y = x^2 - x + 1 = \overbrace{x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}}^{x^2-x} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}^{0} + 1 = \left[x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \qquad = A^2 - 2AB + B^2 \qquad = (A - B)^2$$

b)

$$y = x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = \overbrace{x^2 - 2x\cdot\frac{3}{4}}^{x^2-\frac{3}{2}x} + \overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}^{0} - 2 = \left[x^2 - 2x\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - \frac{9}{16} - 2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \qquad = A^2 - 2AB + B^2 \qquad = (A - B)^2$$

Př. 8: Uprav kvadratickou funkci $y = -x^2 + 4x + 2$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

Problém: Předpis funkce nezačíná x^2
Řešení: Vytkneme mínus před závorku a uvnitř máme to, co už umíme.

$$y = -x^2 + 4x + 2 = -\left(x^2 - 4x\right) + 2 = -\left(x^2 - 2x\cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) + 2 = -\left[(x-2)^2 - 4\right] + 2 =$$

$$= -(x-2)^2 + 4 + 2 = -(x-2)^2 + 6$$

Př. 9: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = 2x^2 + 6x + 4$ b) $y = 0,5x^2 + x + 1$ c) $y = -2x^2 + 4x + 7$

Třikrát stejný problém i stejné řešení jako v předchozím příkladu.

a)

$$y = 2x + 6x + 4 = 2\left(x^2 + 3x\right) + 4 = 2\left[x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 4 = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 4 =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

b)

$$y = 0,5x^2 + x + 1 = 0,5\left(x^2 + 2x\right) + 1 = 0,5\left(x^2 + 2x\cdot 1 + 1^2 - 1^2\right) + 1 = 0,5\left[(x+1)^2 - 1\right] + 1 =$$

$$= 0,5(x+1)^2 - 0,5 + 1 = 0,5(x+1)^2 + 0,5$$

c)

$$y = -2x^2 + 4x + 7 = -2\left(x^2 - 2x\right) + 7 = -2\left(x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2\right) + 7 = -2\left[\left(x-1\right)^2 - 1\right] + 7 =$$
$$= -2\left(x-1\right)^2 + 2 + 7 = -2\left(x-1\right)^2 + 9$$

Př. 10: Petáková:
strana 29/cvičení 54 $f_1, f_2, f_4, f_7, f_8, f_9$

Shrnutí: Z kvadratického trojčlenu můžeme vytvořit druhou mocninu tím, že je doplníme na vzorec $\left(A \pm B\right)^2$.