

2.4.15 Grafy relací s absolutními hodnotami

Předpoklady: 2102, 2402, 2403, 2404, 2405, 2412, 2413

Pedagogická poznámka: Tato hodina nepatří do klasických středoškolských osnov. Je reakcí na fakt, že relace s absolutními hodnotami zůstaly jako reziduum starých časů v maturitních otázkách na naší škole. Nezbývá než je studentům ukázat. V případě časového skluzu hodinu vynechávám a proberu až s maturanty těsně před maturitou.

Na druhou stranu je hodina velice hezká v tom, že si studenti mohou ověřit, že použitím pravidel, která znají, mohou vyřešit i poměrně komplikované příklady, značně odlišné od toho, co znají.

Za úspěšné považuji studenty, kteří vyřeší první čtyři příklady. Zbývající dva jsou bonbónkem pro olympioniky.

Př. 1: Nakresli graf relace $L_1 = \{[x, y] \in R \times R; y \leq -|x+1|\}$.

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu $R \times R$, který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

Nejdříve nakreslíme graf funkce $y = -|x+1|$, tím získáme hraniční čáru grafu relace L_1 ,

šrafováním pak doplníme graf o body $\{[x, y] \in R \times R; y < -|x+1|\}$

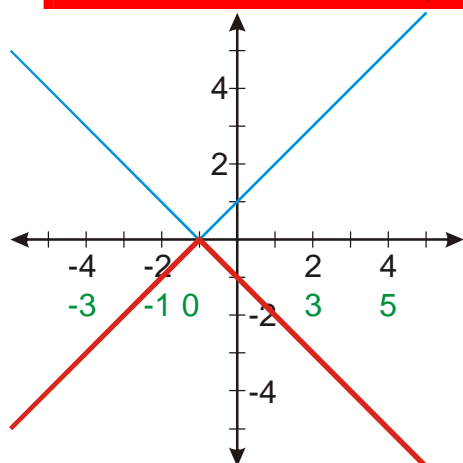
Kreslíme graf funkce $y = -|x+1| = -f(x+1)$. Jako $f(x)$ použijeme funkci $y = |x|$.

Zvolíme x

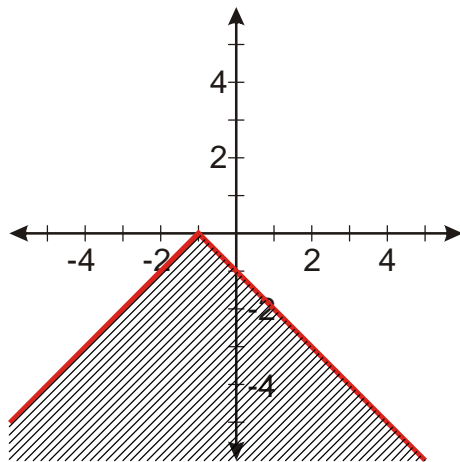
Vypočteme $x+1$

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = |x+1|$

Nakreslíme funkci $y = -f(x+1) = -|x+1|$



Graf funkce $y = -|x+1|$ zobrazuje body pro které platí $\{[x, y] \in R \times R; y = -|x+1|\}$, musíme přidat ještě body $\{[x, y] \in R \times R; y < -|x+1|\}$, tedy body jejichž y-ová souřadnice je menší než bodů na grafu funkce. Menší y-ová souřadnice znamená, že bod je níže \Rightarrow vyšrafujeme oblast pod čárou grafu.



Pedagogická poznámka: Někteří studenti příklad vyřeší bez dalšího komentáře. Jako první nápovědu napíšu na tabuli, že graf funkce $y = -|x+1|$ můžeme napsat jako $L_0 = \{[x, y] \in R \times R; y = -|x+1|\}$. Druhou radou je pokyn, aby studenti nakreslili graf funkce $y = -|x+1|$ a pak přemýšleli nad tím, jak se změní hledané body, když přidáme nerovnost.

Př. 2: Nakresli graf relace $L_2 = \{[x, y] \in R \times R; y \geq |x+1| - x\}$.

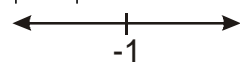
Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu $R \times R$, který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

Nejdříve nakreslíme graf funkce $y = |x+1| - x$, tím získáme hraniční čáru grafu relace L_2 , šrafováním pak doplníme graf o body $\{[x, y] \in R \times R; y > |x+1| - x\}$

Kreslíme graf funkce $y = |x+1| - x$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x+1|: x = -1$$



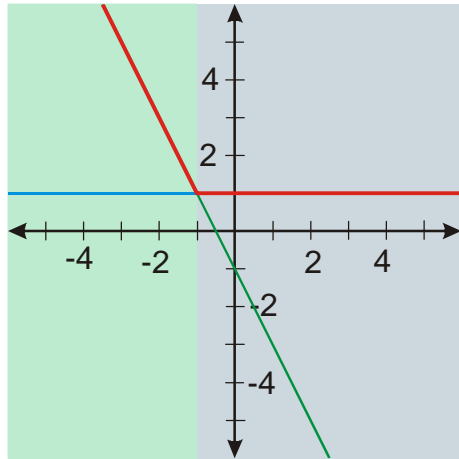
\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; -1) \quad x < -1 \Rightarrow |x+1| = -x-1$$

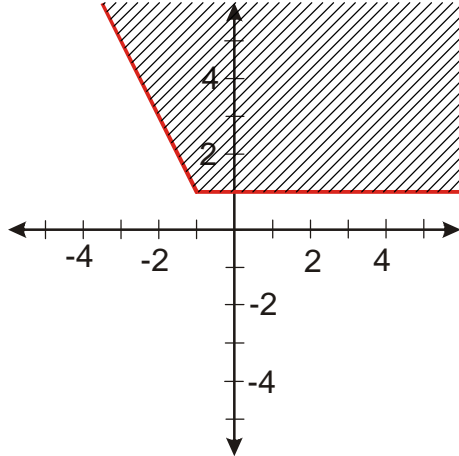
$$y = |x+1| - x = -x-1-x = -2x-1$$

$$2) x \in (-1; \infty) \quad x > -1 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$y = |x+1| - x = x+1-x = 1$$



Graf funkce $y = |x+1| - x$ zobrazuje body pro které platí $\{[x, y] \in R \times R; y = |x+1| - x\}$, musíme přidat ještě body $\{[x, y] \in R \times R; y > |x+1| - x\}$, tedy body jejichž y -ová souřadnice je větší než bodů na grafu funkce. Větší y -ová souřadnice znamená, že bod je výš \Rightarrow vyšrafujeme oblast nad čarou grafu.



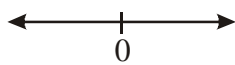
Pedagogická poznámka: S druhým příkladem nebývají problémy. Pokud se vyskytnou, týkají se konstrukce grafu funkce $y = |x+1| - x$. Takovým studentům připomínám, že neselhala logika, ale paměť.

Př. 3: Nakresli graf relace $L_3 = \{[x, y] \in R \times R; |y| > |x|\}$.

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu, který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

Problém: Zápis relace obsahuje $|y|$. Graf funkce $y = |x|$ umíme nakreslit ihned \Rightarrow odstraníme absolutní hodnotu y , abychom mohli řešit příklad ve dvou krocích.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $|y| : y = 0$



\Rightarrow dva intervaly

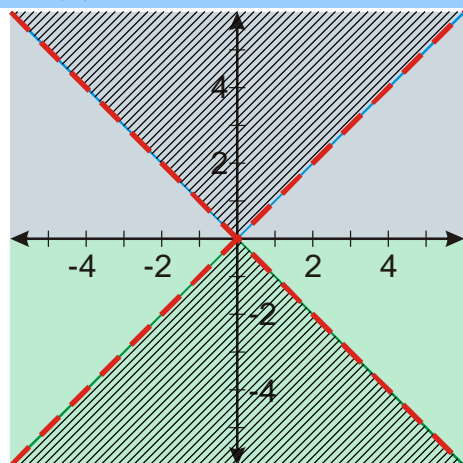
1) $y \in (-\infty; 0)$ $y < 0 \Rightarrow |y| = -y$ kreslíme pod osou x (zelené pozadí)

$-y > |x| \Rightarrow y < -|x|$ vyšrafujeme oblast pod grafem (y -ová souřadnice má být menší)

2) $y \in (0; \infty)$ $y > 0 \Rightarrow |y| = y$ kreslíme nad osou x (modré pozadí)

$$y > |x|$$

vyšrafujeme oblast nad grafem (y-ová souřadnice má být větší)



Grafy funkcí $y = |x|$ a $y = -|x|$ jsou vytaženy čárkovaně, protože jejich body do relace nepatří.

Dodatek: Příklad je možné řešit i z paměti:

$|x|$ je vzdálenost bodu ve směru osy x od počátku (tedy vzdálenost bodu od osy y),

$|y|$ je vzdálenost bodu ve směru osy y od počátku (tedy vzdálenost bodu od osy x)

$\Rightarrow |y| > |x|$ - hledáme body, které jsou od osy x vzdálené více než od osy y .

Pedagogická poznámka: Hodně se snažím o to, aby si studenti při odstraňování $|y|$

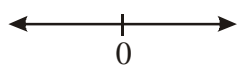
uvědomovali, že jde o naprosto stejný postup jako při odstraňování $|x|$.

Někteří studenti mají potíže se smířit s tím, že v horní polovině se graf chová jinak než v dolní. Doporučuji jim vzít si dva konkrétní body a ověřit si s jejich pomocí, že graf je v horní i spodní polovině vyšrafován správně.

Př. 4: Nakresli graf relace $L_4 = \{[x, y] \in R \times R; |x-1| + |y| \geq 4\}$.

Příklad vypadá složitěji než předchozí. Přepíšeme si podmínku do tvaru, který je podobnější tomu, co jsme dosud řešili: $|x-1| + |y| \geq 4 \Rightarrow |y| \geq 4 - |x-1| \Rightarrow$ fakticky stejný příklad jako předchozí \Rightarrow odstraníme $|y|$ stejně jako v předchozím příkladu.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $|y| : y = 0$



\Rightarrow dva intervaly

1) $y \in (-\infty; 0)$ $y < 0 \Rightarrow |y| = -y$ kreslíme pod osou x (zelené pozadí)

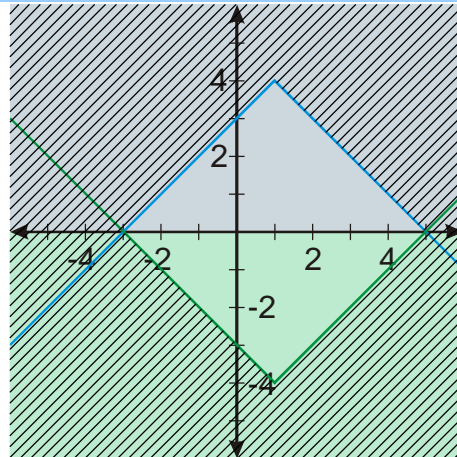
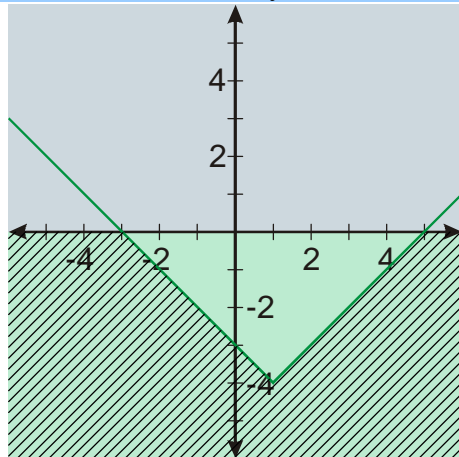
$$-y \geq 4 - |x-1| \quad / \cdot (-1)$$

$y \leq |x-1| - 4$ vyšrafujeme oblast pod grafem funkce $y = |x-1| - 4$ (y-ová souřadnice má být menší nebo rovna)

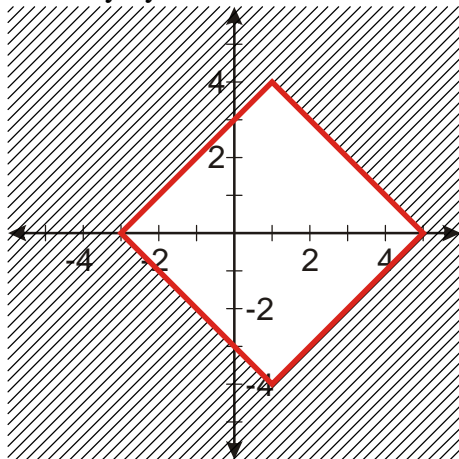
2) $y \in \langle 0; \infty)$ $y > 0 \Rightarrow |y| = y$ kreslíme nad osou x (modré pozadí)

$y \geq 4 - |x-1| = -|x-1| + 4$
 ová souřadnice má být větší)

vyšrafujeme oblast nad grafem funkce $y = -|x-1| + 4$ (y-



Konečný výsledek:



Př. 5: Nakresli graf relace $L_5 = \{[x, y] \in R \times R; |x+1| + 2|y-2| \leq 4\}$. Ještě před začátkem řešení odhadni výsledek.

Odhad výsledku:

Srovnáme aktuální a předchozí předpis: $|x+1| + 2|y-2| \leq 4$ a $|x-1| + |y| \geq 4 \Rightarrow$

opět půjde o kosočtverec, se středem v bodě $[-1; 2]$, který bude mít vyšrafovaný vnitřek.

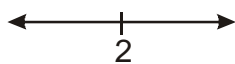
Kosočtverec bude širší než vyšší.

Přepíšeme si podmínku do tvaru, který je podobnější tomu, co jsme dosud řešili:

$$|x+1| + 2|y-2| \leq 4 \Rightarrow 2|y-2| \leq 4 - |x+1|$$

$|y-2| \leq 2 - \frac{1}{2}|x+1| \Rightarrow$ fakticky stejný příklad jako předchozí \Rightarrow odstraníme $|y-2|$ stejně jako v předchozím příkladu $|y|$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $|y-2|$: $y = 2$



\Rightarrow dva intervaly

1) $y \in (-\infty; 2)$ $y-2 < 0 \Rightarrow |y-2| = -y+2$ kreslíme pod přímkou $y = 2$ (zelené pozadí)

$$-y + 2 \leq 2 - \frac{1}{2}|x + 1|$$

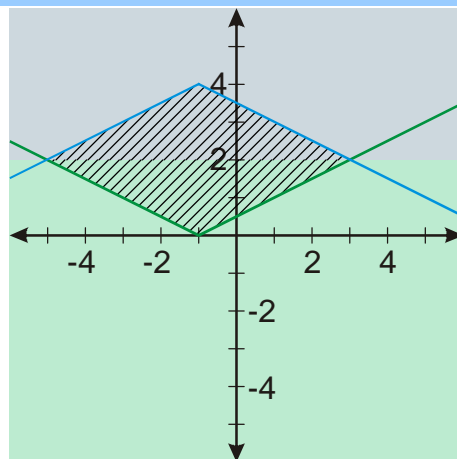
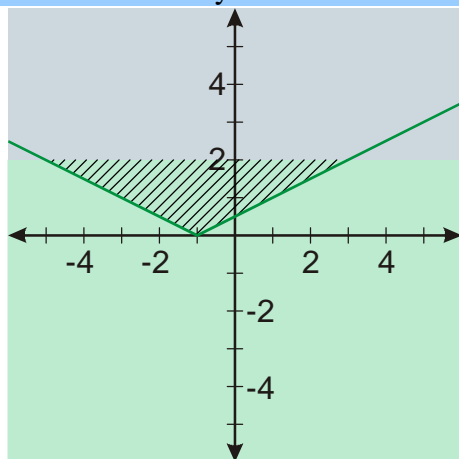
$$-y \leq -\frac{1}{2}|x + 1| \quad / \cdot (-1)$$

$y \geq \frac{1}{2}|x + 1|$ vyšrafujeme oblast nad grafem funkce $y = \frac{1}{2}|x + 1|$ (y-ová souřadnice má být větší nebo rovna)

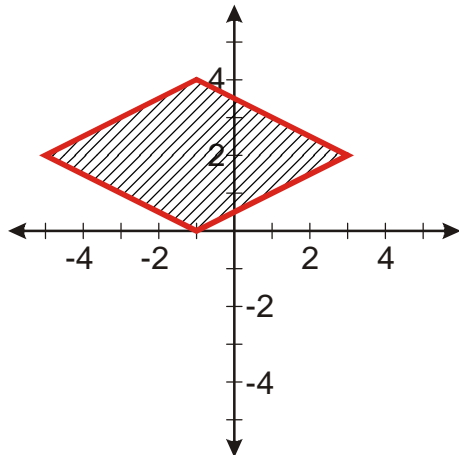
2) $y \in \langle 2; \infty)$ $y - 2 > 0 \Rightarrow |y - 2| = y - 2$ kreslíme nad přímkou $y = 2$ (modré pozadí)

$$y - 2 \leq 2 - \frac{1}{2}|x + 1|$$

$y \leq 4 - \frac{1}{2}|x + 1|$ vyšrafujeme oblast pod grafem funkce $y = 4 - \frac{1}{2}|x + 1|$ (y-ová souřadnice má být menší nebo rovna)



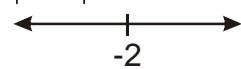
Konečný výsledek:

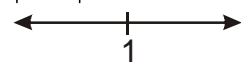


Př. 6: Nakresli graf relace $L_6 = \{[x, y] \in R \times R; |y - 1| + y + |x + 2| - 2x - 7 \geq 0\}$.

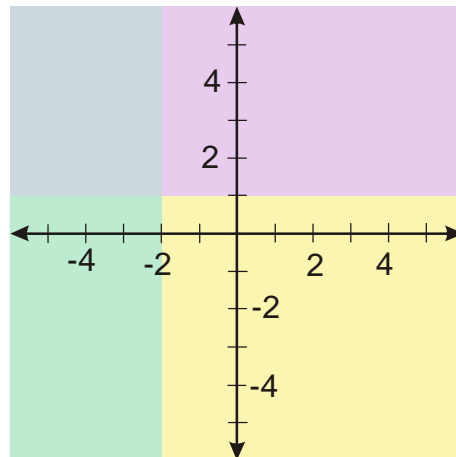
Předpis obsahuje absolutní hodnotu s x i y , stejně tak obě neznámé mimo absolutní hodnotu \Rightarrow musíme rozdělit intervaly u obou proměnných.

Zjistíme nulové bod absolutních hodnot:

$$|x+2|: x = -2$$


$$|y-1|: y = 1$$


\Rightarrow čtyři kombinace \Rightarrow
plocha grafu se rozpadne na čtyři části

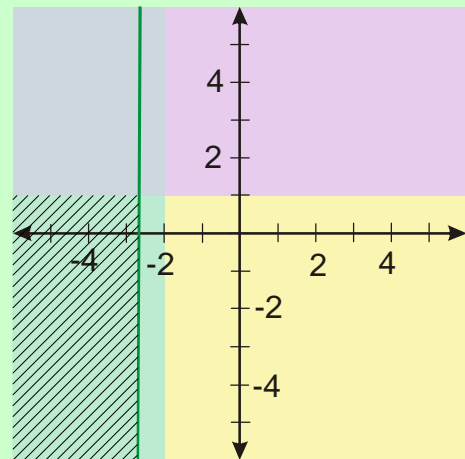


1) $x \in (-\infty; -2) \wedge y \in (-\infty; 1)$ $x < -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2$ $y < 1 \Rightarrow |y-1| = -y+1$

$$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = -y+1 + y - x - 2 - 2x - 7 \geq 0$$

$$-8 \geq 3x$$

$$x \leq -\frac{8}{3}$$



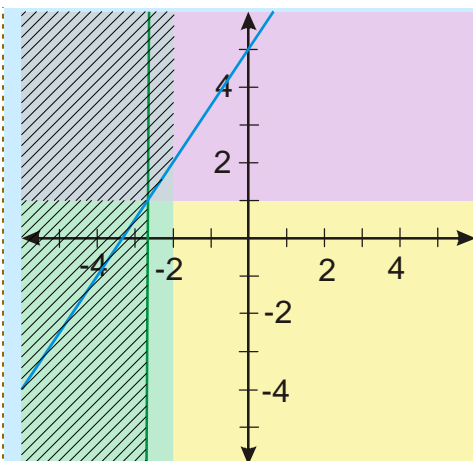
2) $x \in (-\infty; -2) \wedge y \in (1; \infty)$ $x < -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2$ $y > 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$

$$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = y-1 + y - x - 2 - 2x - 7 \geq 0$$

$$2y - 3x - 10 \geq 0$$

$$2y \geq 3x + 10$$

$$y \geq \frac{3}{2}x + 5$$

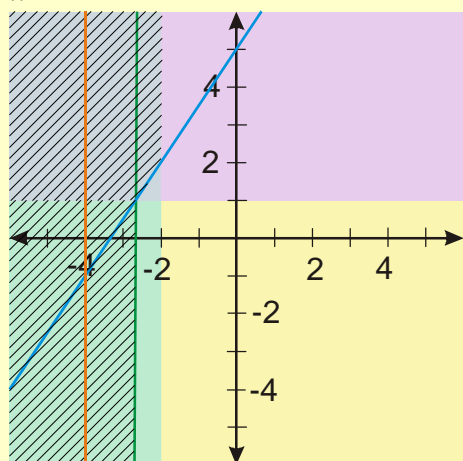


3) $x \in \langle -2; \infty \rangle \wedge y \in (-\infty; 1)$ $x > -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$ $y < 1 \Rightarrow |y-1| = -y+1$

$$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = -y+1 + y + x+2 - 2x - 7 \geq 0$$

$$-x - 4 \geq 0$$

$$x \leq -4$$



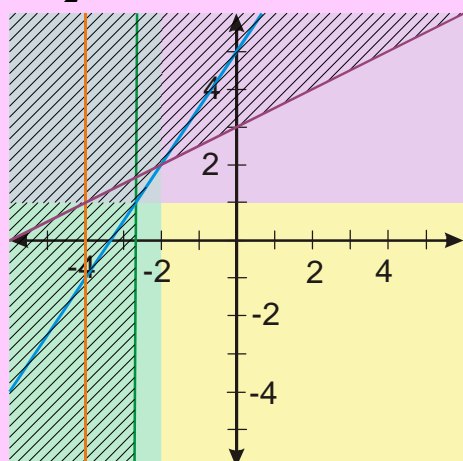
4) $x \in \langle -2; \infty \rangle \wedge y \in \langle 1; \infty \rangle$ $x > -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$ $y > 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$

$$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = y-1 + y + x+2 - 2x - 7 \geq 0$$

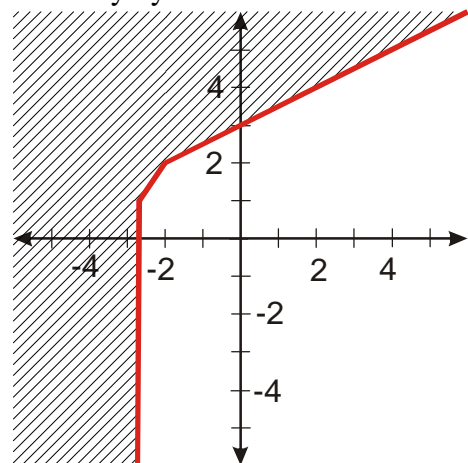
$$2y - x - 6 \geq 0$$

$$2y \geq x + 6$$

$$y \geq \frac{x}{2} + 3$$



Konečný výsledek:



Shrnutí: Pokud umíme nakreslit grafy funkcí, je možné kreslit i grafy relací, které se pomocí funkcí vyjadřují.