

2.4.14 Kreslení grafů konkrétních funkcí

Předpoklady: 2412, 2413

Pedagogická poznámka: V ideálním případě by tato hodina měla být poslední v prvním ročníku. Proto obsahuje kromě nové látky také shrnutí probraného, které bude potřeba k probírání všech ostatních druhů funkcí. Je jedním z hlavních záměrů učebnice ukázat, že všechny druhy funkcí mají hodně společného a že znalosti ze začátku tohoto dílu jsou potřebné pořád.

Pedagogická poznámka: Snažím se postupovat tak, aby většina studentů stihla příklad 7. Příklad 8 je určen pro zabavení těch rychlejších.

Shrnutí předchozích hodin:

Graf libovolné variace funkce $f(x)$ nakreslíme tak, že předpis funkce rozdělíme na jednotlivé kroky. Výpočty uvnitř závorky značící funkci (v případě funkce $y = 2f(|x|-1)$ jde o výraz $|x|-1$) se týkají hodnot proměnné x před dosazením do funkce a mění hodnoty na ose x . Podle těchto upravených hodnot pak nakreslíme graf funkce $f(x)$. Výpočty vně závorky značící funkci (v případě funkce $y = 2f(|x|-1)$ jde o násobení $f(|x|-1)$ dvěma) se týkají již nakresleného grafu funkce a různě ho mění (podle typu výpočtu). Nic víc nepotřebujeme. Pamatovat si, co s grafem provádějí jednotlivé druhy výpočtu je nesmysl.

K čemu je dobré, že umíme kreslit grafy funkcí vycházejících z $f(x)$?

Jako funkci $f(x)$ můžeme použít libovolný graf funkce, které už známe nebo i funkce, o které nevíme zhora nic, kromě jejího grafu

Jako příklad zkusíme $y = |x| = f(x) \Rightarrow$

- v zápisu místo obecného $f(\quad)$, píšeme konkrétní $| \quad |$
- v grafech místo nějakého obrázku, kreslíme konkrétní graf funkce $y = |x|$ ve tvaru písmena V.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = |x+2|-1$.

Prepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = |x+2|-1 = f(x+2)-1$

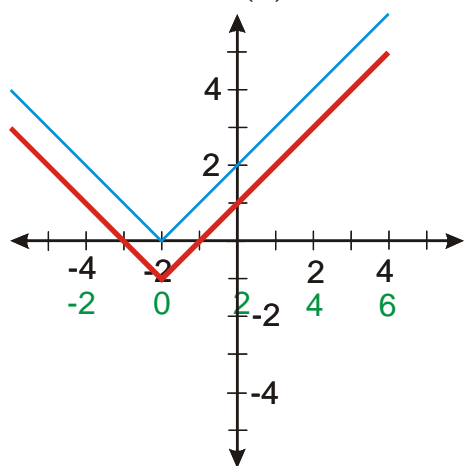
Zvolíme x

Vypočteme $x+2$

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) = |x+2|$

Nakreslíme funkci $y = f(x+2)-1 = |x+2|-1$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = |x|$.



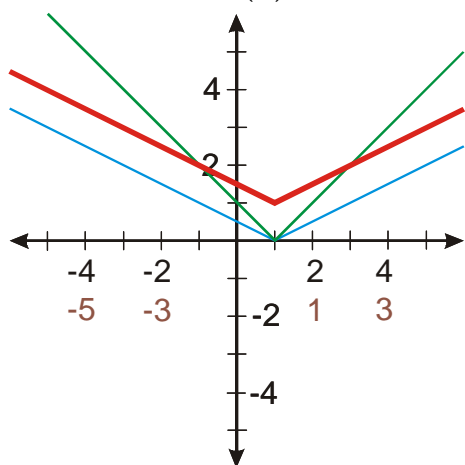
Pedagogická poznámka: Většina studentů potřebuje pomoci zejména s přepisem z konkrétního zadání, do zadání pomocí $f(x)$. Snažím se z toho nedělat vědu, opravdu jde jen o to, že rovné závorky absolutní hodnoty nahradíme normálními, před které napíšeme f .

Př. 2: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{2}|x-1|+1$.

Přepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = \frac{1}{2}|x-1|+1 = \frac{1}{2}f(x-1)+1$

Zvolíme x
Vypočteme $x-1$
Nakreslíme funkci: $y = f(x-1) = x-1 $
Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2}f(x-1) = \frac{1}{2} x-1 $
Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2}f(x-1)+1 = \frac{1}{2} x-1 +1$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = |x|$.



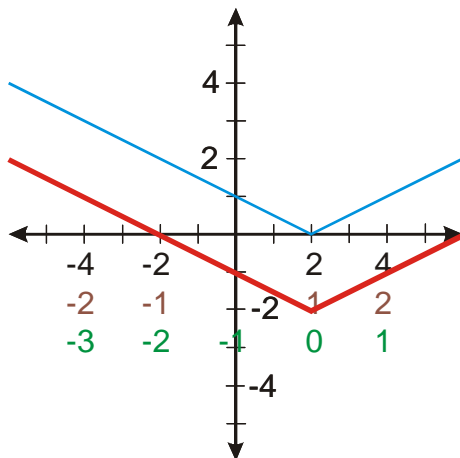
Pedagogická poznámka: V tomto příkladě by již měli být všichni schopni přepsat konkrétní zadání na obecné samostatně.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - 2$.

Přepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - 2 = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2$

Zvolíme x
Vypočteme $\frac{1}{2}x$
Vypočteme $\frac{1}{2}x - 1$
Nakreslíme funkci $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \left \frac{1}{2}x - 1 \right $
Nakreslíme funkci $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2 = \left \frac{1}{2}x - 1 \right - 2$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = |x|$.



Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se objevuje poměrně dost chyb, které v naprosté většině pramení z příliš rychlého přepisování osy. Porovnáváme si výsledek s předchozím příkladem, pokud nakreslí špatně posunutý graf (s vrcholem pro $x = 1$) větší množství studentů, opět si připomínáme, že správné umístění vrcholu si můžeme zkontrolovat pomocí nulové hodnoty vnitřku absolutní hodnoty.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = |2|x+1| - 2| - 1$.

Přepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = |2|x+1| - 2| - 1 = |2f(x+1) - 2| - 1$

Zvolíme x
Vypočteme $x+1$
Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = x+1 $
Nakreslíme funkci $y = 2f(x+1) = 2 x+1 $

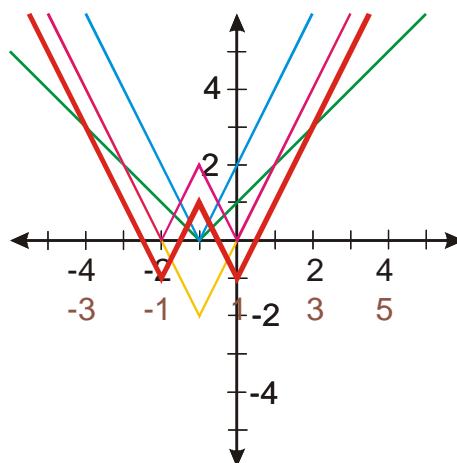
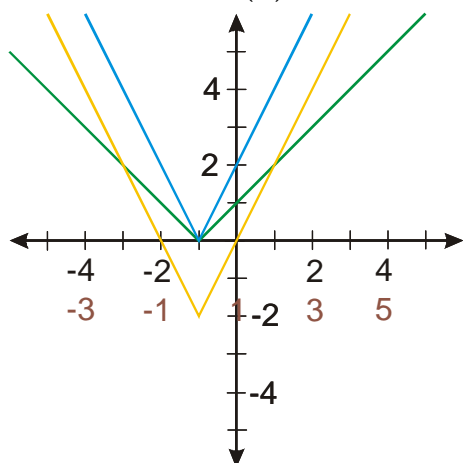
Nakreslíme funkci $y = 2f(x+1) - 2 = 2|x+1| - 2$

Nakreslíme funkci $y = |2f(x+1) - 2| = |2|x+1| - 2|$

Nakreslíme funkci

$$y = |2f(x+1) - 2| - 1 = |2|x+1| - 2| - 1$$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = |x|$.



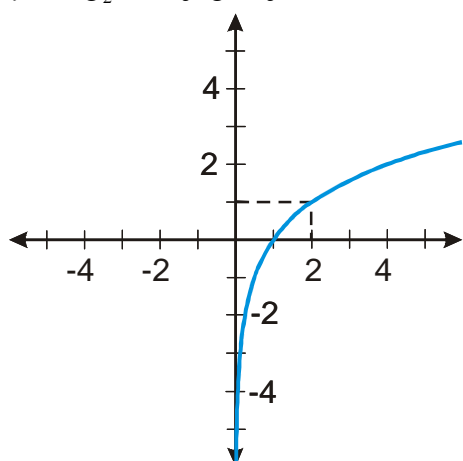
Dodatek: Funkci $y = |2|x+1| - 2| - 1$ můžeme přepsat i druhým způsobem:

$$y = y = |2|x+1| - 2| - 1 = f(2|x+1| - 2) - 1.$$

Pedagogická poznámka: Druhý způsob přepisu funkce z příkladu 4 studenti prakticky nepoužívají. Pokud se nějaká výjimka vyskytne, chci, aby požila stejný přepis jako ostatní (kvůli kontrole). Použití druhého přepisu je náplní posledního příkladu v hodině.

Stejně jednoduše můžeme kreslit i funkce, o kterých nic nevíme. Například funkce

$y = \log_2 x$. Její graf je na obrázku:



prochází body $[1;0]$ a $[2;1]$, je rostoucí a definovaná pouze pro kladná čísla. Ve zbytku hodiny platí $y = f(x) = \log_2(x)$.

Př. 5: Nakresli graf funkce $y = \log_2(x+3)+1$.

Přepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = \log_2(x+3)+1 = f(x+3)+1$

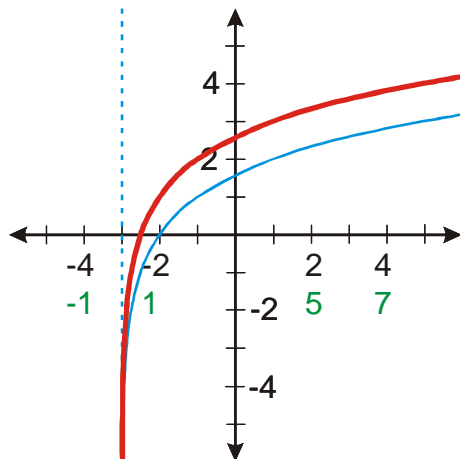
Zvolíme x

Vypočteme $x+3$

Nakreslíme funkci $y = f(x+3) = \log_2(x+3)$

Nakreslíme funkci $y = f(x+3)+1 = \log_2(x+3)+1$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = \log_2 x$.



Př. 6: Nakresli graf funkce $y = |\log_2 x| - 2$.

Přepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = |\log_2 x| - 2 = |f(x)| - 2$

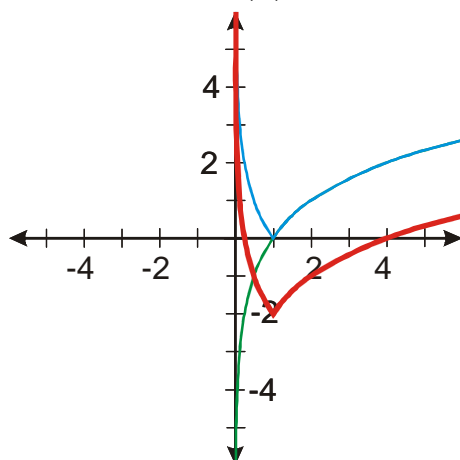
Zvolíme x

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \log_2 x$

Nakreslíme funkci $y = |f(x)| = |\log_2 x|$

Nakreslíme funkci $y = |f(x)| - 2 = |\log_2 x| - 2$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = \log_2 x$.

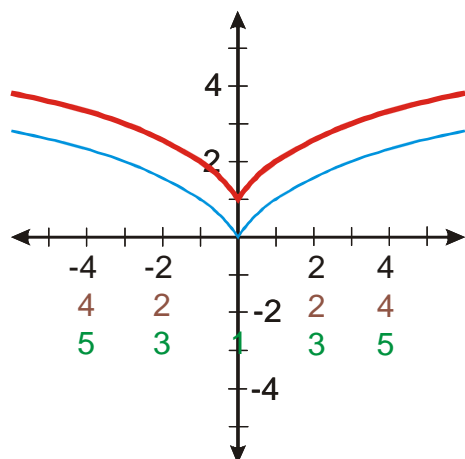


Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \log_2(|x|+1)+1$.

Prepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = \log_2(|x|+1)+1 = f(|x|+1)+1$

Zvolíme x
Vypočteme $ x $
Vypočteme $ x +1$
Nakreslíme funkci $y = f(x +1) = \log_2(x +1)$
Nakreslíme funkci $y = f(x +1)+1 = \log_2(x +1)+1$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = \log_2 x$.



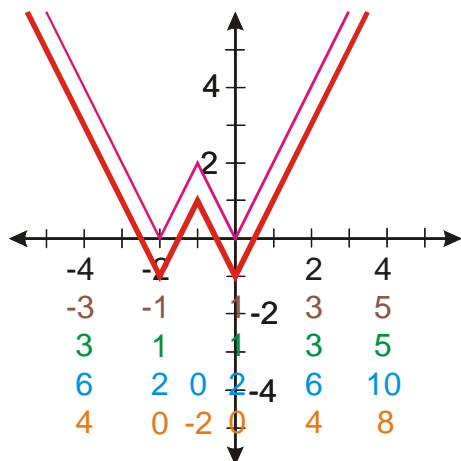
Př. 8: Nakresli graf funkce $y = |2|x+1|-2|-1$ pomocí přepisu

$y = y = |2|x+1|-2|-1 = f(2|x+1|-2)-1$. Porovnej výsledek s výsledkem příkladu 4.

Prepíšeme pomocí zápisu $y = f(x)$: $y = y = |2|x+1|-2|-1 = f(2|x+1|-2)-1$

Zvolíme x
Vypočteme $x+1$
Vypočteme $ x+1 $
Vypočteme $2 x+1 $
Vypočteme $2 x+1 -2$
Nakreslíme funkci $y = 2f(x+1)-2 = 2 x+1 -2 $
Nakreslíme funkci $y = 2f(x+1)-2 -1 = 2 x+1 -2 -1$

Jako funkci $y = f(x)$ použijeme $y = |x|$.



Stejný výsledek jako u původního postupu.

Je zřejmé, že nakreslit graf jakékoliv další funkce pro nás v budoucnosti nebude problém.

Jaké další znalosti budeme potřebovat?

- úpravy rovnic
- úpravy nerovnic, obracení znaménka
- součinnové tvary
- úpravy výrazů, vytýkání
- orientace v grafech
- odstraňování absolutní hodnoty (ve funkcích, rovnicích i nerovnicích).

K těmto poznatkům pak schopnost experimentovat, pracovat postupně a držet si přehled, kontrolovat průběžně smysl vlastního počítání.

K těmto několika základním postupům už toho moc nepřidáme, ale dotáhneme to opravdu docela daleko.

Shrnutí: Náš postup pro kreslení funkcí je možné použít na libovolnou i „neznámou“ funkci.