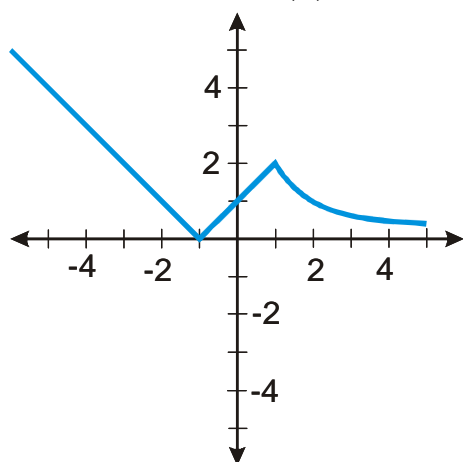


2.4.12 Kreslení graf obecné funkce I

Předpoklady: 2402, 2403

Pedagogická poznámka: V závislosti na tom, jak hluboko pochopili studenti hodiny 2402 a 2403 dochází k rozštěpení třídy na dvě části. Někdy až 80% dokáže nakreslit bez jakékoliv pomoci všechno (včetně příkladů z Petákové), zbytek potom postupuje pomaleji a ne vždy se dostane až příkladu 10 (což zas až tak nevádí). Zřejmě největším problémem při pochopení metody je, aby studenti dobře rozuměli tomu, že zápis $f(x)$ znamená y -vou hodnotu bodů grafu.

Je dána funkce $y = f(x)$ grafem na obrázku:

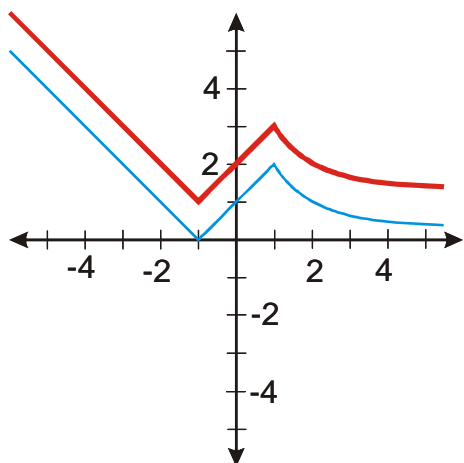


Funkce je sestavena z částí lineárních funkcí a části funkce $y = \frac{2}{x}$. Příliš nás to nezajímá, stačí nám několik funkčních hodnot jako $f(-2) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, hodnoty funkce se pro velká x blíží nule.

Pomocí tohoto obrázku dokážeme nakreslit grafy mnoha dalších funkcí.

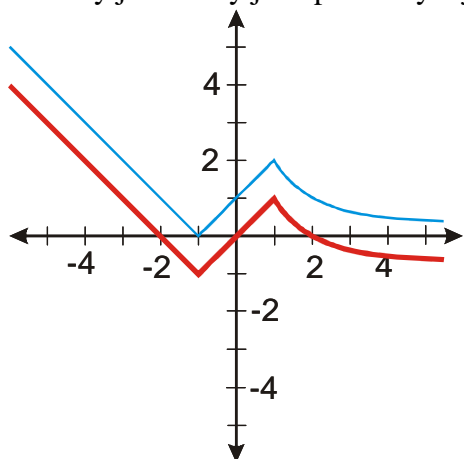
Př. 1: Nakresli graf funkce $y = f(x) + 1$.

Funkční hodnoty funkce $y = f(x) + 1$ jsou pro stejná x vždy o jednu větší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ graf funkce $y = f(x) + 1$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou posunuty o jednu výš (hodnoty jsou o jednu větší).



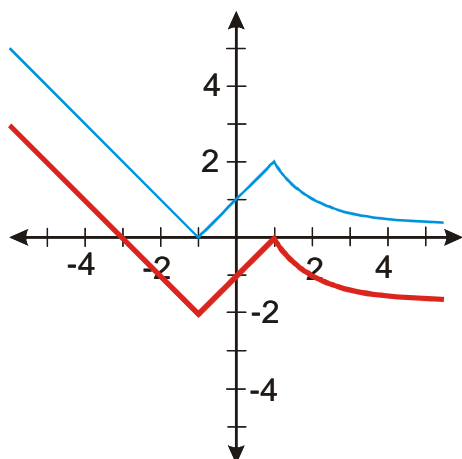
Př. 2: Nakresli graf funkce $y = f(x) - 1$.

Funkční hodnoty funkce $y = f(x) - 1$ jsou pro stejná x vždy o jednu menší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = f(x) - 1$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou posunuty o jednu níže (hodnoty jsou o jednu menší).



Př. 3: Nakresli graf funkce $y = f(x) - 2$.

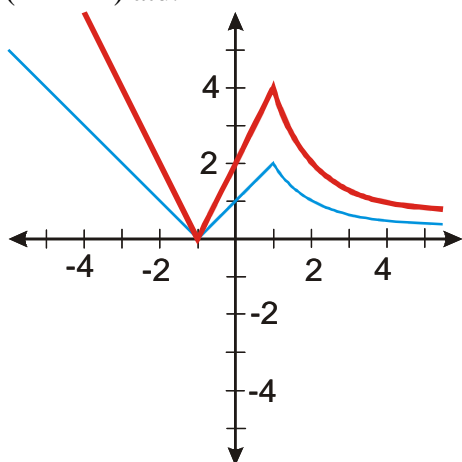
Funkční hodnoty funkce $y = f(x) - 2$ jsou pro stejná x vždy o dvě menší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = f(x) - 2$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou posunuty o dvě níže (hodnoty jsou o dvě menší).



Pedagogická poznámka: Pokud někdo kreslí pomalu, ať příklad 3 přeskočí a pracuje rovnou na 4.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = 2f(x)$.

Funkční hodnoty funkce $y = 2f(x)$ jsou pro stejná x vždy dvakrát větší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = 2f(x)$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou dvakrát dále od osy x (hodnoty jsou o dvakrát větší), body s hodnotou 0 se nezmění ($2 \cdot 0 = 0$), body s hodnotou 1 se posunou tak, aby jejich y -vá souřadnice měla hodnotu 2 ($2 \cdot 1 = 2$) atd.



Pedagogická poznámka: Často je potřeba studenty upozornit, že konečná funkce má sice hodnoty dvojnásobné než $f(x)$, ale i přesto se pro velká x blíží k nule.

U dalších příkladů je potřeba pečlivě dodržovat posloupnost operací.

Př. 5: Nakresli graf funkce $y = -\frac{1}{2}f(x)$.

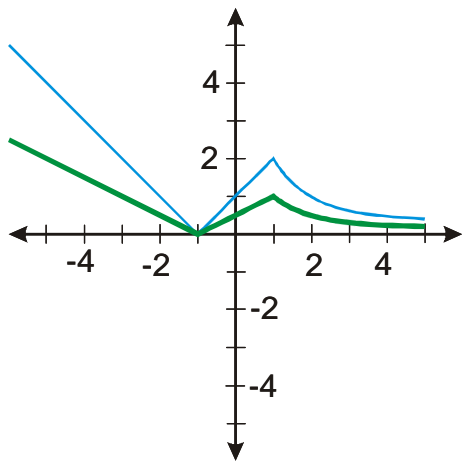
Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y = f(x)$ - nejdříve spočteme hodnotu funkce

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x)$ - získané hodnoty vynásobíme číslem $\frac{1}{2}$

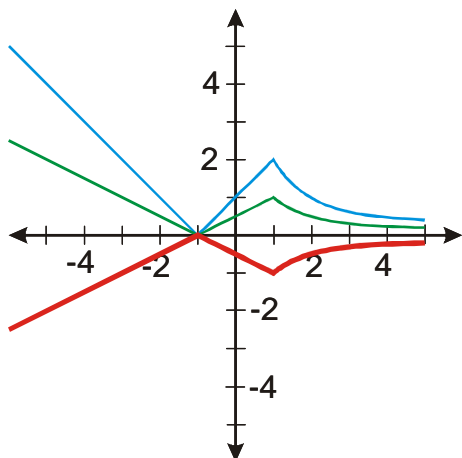
Nakreslíme funkci $y = -\frac{1}{2} f(x)$ - získané hodnoty násobíme -1

Funkční hodnoty funkce $y = \frac{1}{2} f(x)$ jsou pro stejná x vždy poloviční než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = 2f(x)$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou v poloviční vzdálenosti od osy x (hodnoty jsou o poloviční), body s hodnotou 0 se nezmění ($\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$), body s hodnotou 1 se posunou tak, aby jejich y -vá souřadnice měla hodnotu $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$) atd.



Funkční hodnoty funkce $y = -\frac{1}{2} f(x)$ jsou pro stejná x opačná k hodnotám funkce

$y = \frac{1}{2} f(x) \Rightarrow$ každý bod grafu funkce $y = \frac{1}{2} f(x)$ se zobrazí v osové souměrnosti podle osy x (hodnotě se změní znaménko), body s hodnotou 0 se nezmění ($-0 = 0$), body s hodnotou 1 se zobrazí tak, aby jejich y -vá souřadnice měla hodnotu -1 ($(-1) \cdot 1 = -1$) atd.



Př. 6: Nakresli graf funkce $y = |f(x) - 1|$.

Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

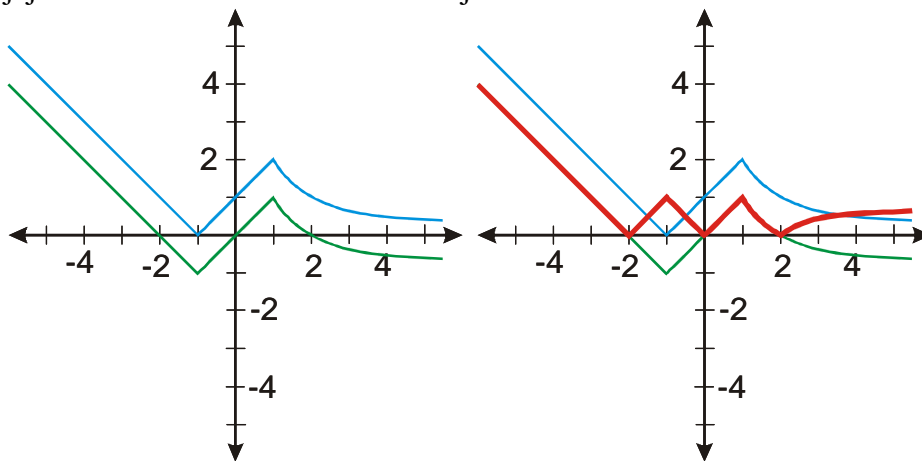
Nakreslíme funkci $y = f(x)$

Nakreslíme funkci $y = f(x) - 1$

Nakreslíme funkci $y = |f(x) - 1|$

Každý graf získáme upravením předchozího, způsobem, který zachycuje výpočet, který do předpisu funkce přibyl.

Funkční hodnoty funkce $y = |f(x) - 1|$ jsou pro stejná x stejné jako hodnoty funkce $y = f(x) - 1$ pokud jsou kladné. Pokud jsou záporné (pod osou x), absolutní hodnota změní jejich znaménko – osově souměrně je zobrazí nad osu x .



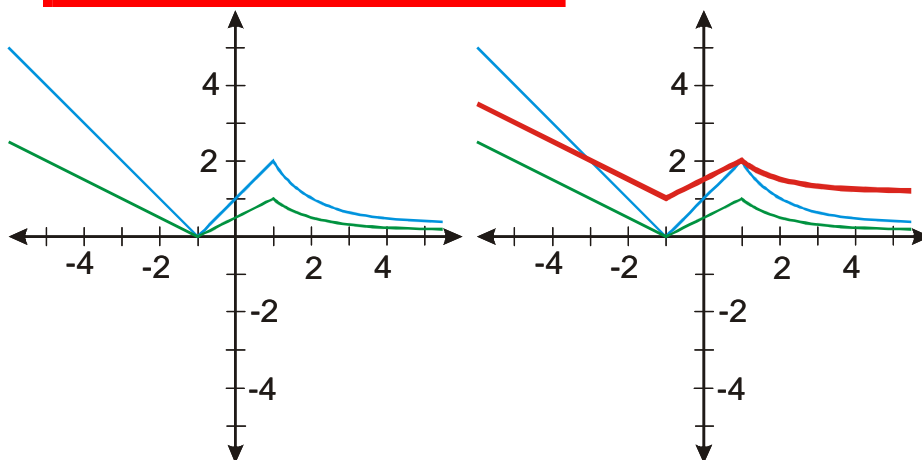
Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{2} f(x) + 1$.

Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y = f(x)$

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x)$

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x) + 1$



Př. 8: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{2}[2 + f(x)]$.

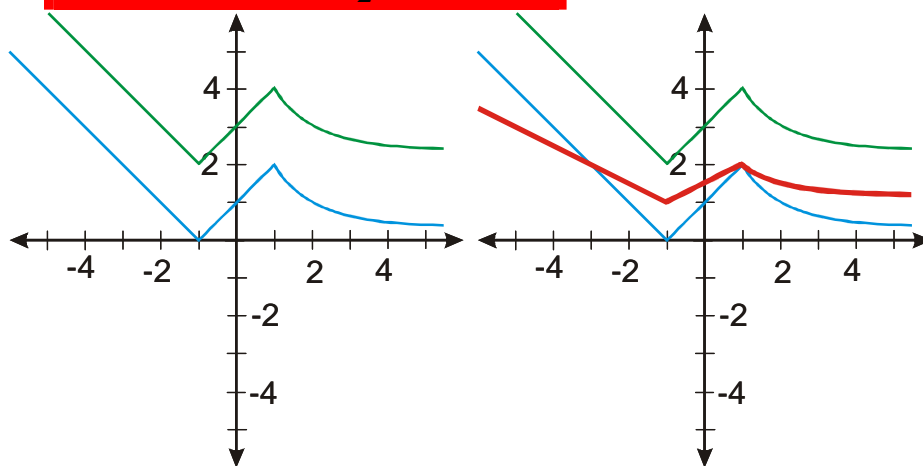
Vypadá to, že $f(x)$ není na začátku, ale stačí přepsat výraz v závorce: $y = \frac{1}{2}[f(x) + 2]$

Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y = f(x)$

Nakreslíme funkci $y = f(x) + 2$

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2}[f(x) + 2]$



Př. 9: Porovnej výsledky příkladu 7 a 8. Zdůvodni.

Výsledky obou příkladů jsou stejné, což vyplývá přímo z úpravy předpisu funkce

$$y = \frac{1}{2}[f(x) + 2] = \frac{1}{2}f(x) + 1$$

Př. 10: Nakresli graf funkce $y = 2[1 - f(x)]$.

Vypadá to, že $f(x)$ není na začátku, ale stačí přepsat výraz v závorce: $y = 2[-f(x) + 1]$

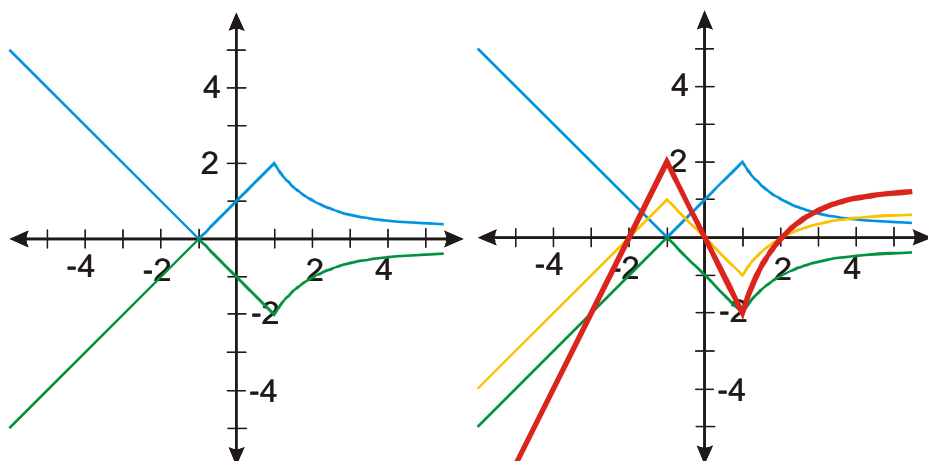
Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y = f(x)$

Nakreslíme funkci $y = -f(x)$

Nakreslíme funkci $y = -f(x) + 1$

Nakreslíme funkci $y = 2[-f(x) + 1]$



Př. 11: Petáková:
strana 27/cvičení 29 a) d) e) f) h)

Shrnutí: Grafy odvozených funkcí můžeme nakreslit i v případě, že původní funkce nemá jednoduché vyjádření. Stačí sledovat výpočet funkční hodnoty a provádět odpovídající úpravy na grafu původní funkce.