2.4.10 Rovnice s absolutní hodnotou II

Předpoklady: 2409

Pedagogická poznámka: Jenom nejlepší studenti stihnou spočítat obsah celé hodiny. Většina třídy se dostane přibližně k příkladu 7, což stačí na obstojné zvládnutí látky. Stejně jako v minulé hodině trvám na tom, že metoda řešení rovnic zcela odpovídá metodě pro kreslení funkcí a v případě nejasností je možné se rozhodovat podle zkušeností s funkcemi.

Př. 1: Vyřeš rovnici $|7-4x|+2=1$ pomocí metody dělení definičního oboru.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) ? $\Rightarrow 7-4x=0 \Rightarrow 4x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{4}$

$\frac{7}{4}$ $\Rightarrow$ 2 intervaly

$x\in\left(-\infty;\frac{7}{4}\right\rangle$ $7-4x\geq 0 \Rightarrow |7-4x|=7-4x$

Řešíme rovnici: $|7-4x|+2=1$

$7-4x+2=1$

$8=4x$

$x=2$ Zdá se, že jsme našli kořen, ale není to pravda. 2 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_1=\emptyset$

$x\in\left\langle\frac{7}{4};\infty\right)$ $7-4x\leq 0 \Rightarrow |7-4x|=-(7-4x)=4x-7$

Řešíme rovnici: $|7-4x|+2=1$

$4x-7+2=1$

$4x=6$

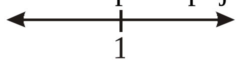
$x=\frac{3}{2}$ Zdá se, že jsme našli kořen, ale není to pravda. $\frac{3}{2}$ nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_2=\emptyset$

$K=K_1\cup K_2=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Až překvapivý počet studentů spočítá příklad špatně, protože si nevšimne, že výraz $7-4x$ je pro záporná čísla kladný. Je to dobrý okamžik pro bojování s pravidly typu „v prvním intervalu dáváme před závorku mínus" a trvání na správném (i když ohledně přemýšlení náročnějším) pravidle „podle znaménka výrazu uvnitř absolutní hodnoty…".

Př. 2: Vyřeš rovnici $2(x+1)=|x-1|$ pomocí metody dělení definičního oboru.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) ? $\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$



$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in (-\infty;1\rangle$ $\quad x-1 \le 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = -x+1$

Řešíme rovnici: $2(x+1)=|x-1|$

$2x+2=-x+1$
$3x=-1$
$x=-\frac{1}{3}$ Patří mezi čísla, se kterými jsme počítali $\Rightarrow K_1=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

$x \in \langle 1;\infty)$ $\quad x-1 \ge 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

Řešíme rovnici: $2(x+1)=|x-1|$

$2x+2=x-1$
$x=-3$ Zdá se, že jsme našli kořen, ale -3 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali.
$\Rightarrow K_2=\emptyset$

$K=K_1 \cup K_2=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

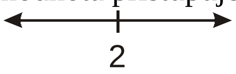
Poznámka: Bohužel bývá často kladen dotaz, proč jsme nedělili R na tři intervaly i pomocí –1, která vytváří nulovou hodnotu v normální závorce na levé straně. Kdo to chápe, ať nečte dál.
Důvod je jednoduchý, na levé straně je normální závorka, kterou vypočítáváme pro všechna čísla stejně. Na pravé straně je absolutní hodnota, kterou pro různá čísla vypočítáváme dvěma různými způsoby – u některých čísel měníme znaménko, u jiných ho neměníme. Právě tyto dva způsoby vypočítání na nutí rozdělit řešení do dvou částí (každá pro jeden způsob vypočítávání).
Více v tabulce:

x	hodnota $(x+1)$	výraz $(x+1)$ vyjádřen jako	hodnota $\lvert x-1\rvert$	výraz $\lvert x-1\rvert$ vyjádřen jako
-3	$(-3+1)=-2$	$(x+1)$	$\lvert -3-1\rvert=\lvert -4\rvert=-(-4)=4$	$-(x-1)$
-2	$(-2+1)=-1$	$(x+1)$	$\lvert -2-1\rvert=\lvert -3\rvert=-(-3)=3$	$-(x-1)$
-1	$(-1+1)=0$	$(x+1)$	$\lvert -1-1\rvert=\lvert -2\rvert=-(-2)=2$	$-(x-1)$
0	$(0+1)=1$	$(x+1)$	$\lvert 0-1\rvert=\lvert -1\rvert=-(-1)=1$	$-(x-1)$
2	$(2+1)=3$	$(x+1)$	$\lvert 2-1\rvert=\lvert 1\rvert=1$	$(x-1)$
3	$(3+1)=4$	$(x+1)$	$\lvert 3-1\rvert=\lvert 2\rvert=2$	$(x-1)$

V horních čtyřech řádcích jsme při určení hodnoty výrazu $|x-1|$ postupovali jinak než v dolních dvou řádcích. Tyto dva postupy nejdou sloučit do jednoho a proto musíme řešit rovnici nadvakrát pokaždé s jiným postupem.
Výraz $(x+1)$ jsme vypočítávali ve všech případech stejně, proto nemusíme postup zbytečně štěpit (jako jsme to nedělali u obyčejných lineárních rovnic bez absolutní hodnoty).

Př. 3: Vyřeš rovnici $\left|x-2\right| = 2-x$ pomocí metody dělení definičního oboru..

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$



$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in (-\infty;2\rangle$ $\quad$ $x-2 \le 0 \Rightarrow \left|x-2\right| = -(x-2) = -x+2$

Řešíme rovnici: $\left|x-2\right| = 2-x$

$-x+2 = 2-x$

$0=0$ Rovnice je splněna pro všechna čísla. Nejedná se ale o všechna reálná čísla, ale pouze o všechna čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1 = (-\infty;2\rangle$

$x \in \langle 2;\infty)$ $\quad$ $x-2 \le 0 \Rightarrow \left|x-2\right| = x-2$

Řešíme rovnici: $\left|x-2\right| = 2-x$

$x-2 = 2-x$

$2x = 4$

$x=2$ 2 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2 = \{2\}$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;2\rangle$

Pedagogická poznámka: Příklad jitří starou bolest s rovnicemi, které ústí do rovnosti $0=0$. Většina studentů si neuvědomí, že tentokrát nemůže napsat $K=R$, protože nepočítá se všemi čísly najednou.

Př. 4: Vyřeš rovnici $\left|x+1\right| - \left|1-x\right| + 2 = x$.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)?

$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ $\qquad$ $1-x=0 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$ 3 intervaly

$x \in (-\infty;-1\rangle$ $\quad$ $x+1 \le 0 \Rightarrow \left|x+1\right| = -(x+1) = -x-1$ $\quad$ $1-x \ge 0 \Rightarrow \left|1-x\right| = 1-x$

Řešíme rovnici: $\left|x+1\right| - \left|1-x\right| + 2 = x$

$-x-1-(1-x)+2 = x$

$-x-1-1+x+2 = x$

$x=0$ 0 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1 = \emptyset$

$x \in \langle -1;1\rangle$ $\quad$ $x+1 \ge 0 \Rightarrow \left|x+1\right| = x+1$ $\quad$ $1-x \ge 0 \Rightarrow \left|1-x\right| = 1-x$

Řešíme rovnici: $\left|x+1\right| - \left|1-x\right| + 2 = x$

$x+1-(1-x)+2 = x$

$x+1-1+x+2 = x$

$x=-2$ -2 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2 = \emptyset$

$x \in \langle 1;\infty)$ $\quad$ $x+1 \ge 0 \Rightarrow \left|x+1\right| = x+1$ $\quad$ $1-x \le 0 \Rightarrow \left|1-x\right| = -(1-x) = x-1$

Řešíme rovnici: $|x+1|-|1-x|+2=x$

$x+1-(x-1)+2=x$

$x=4$ 4 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_3=\{4\}$

$K=K_1\cup K_2\cup K_3=\{4\}$

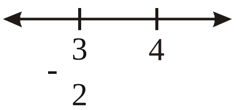
Pedagogická poznámka: Většina chyb vyplývá ze znaménka mínus před druhou absolutní hodnotou.

Při řešení dalších příkladů budeme používat úspornější zápis:

Př. 5: Vyřeš rovnici $|4-x|-|2x+3|=7$.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) ?

$\Rightarrow 4-x=0\Rightarrow x=4$ $2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$



$\Rightarrow$ 3 intervaly

$x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle$

$4-x+2x+3=7$

$x=0$ 0 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\emptyset$

$x\in\left\langle-\frac{3}{2};4\right\rangle$

$4-x-2x-3=7$

$x=-2$ -2 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\emptyset$

$x\in\left\langle 4;\infty\right)$

$-4+x-2x-3=7$

$x=-14$ -14 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_3=\emptyset$

$K=K_1\cup K_2\cup K_3=\emptyset$

Př. 6: Vyřeš rovnici $|x+2|=4|x-3|$.

$\Rightarrow$ 3 intervaly

$x\in\left(-\infty;-2\right\rangle$

$-x-2=-4(x-3)$

$3x=14$

$x=\frac{14}{3}$ Nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\emptyset$

$x\in\left\langle-2;3\right\rangle$

$x+2=-4(x-3)$

$5x=10$

$x=2$ Patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\{2\}$

$x\in\langle 3;\infty)$

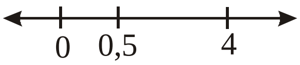
$x+2=4(x-3)$

$-3x=-14$

$x=\dfrac{14}{3}$ Patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_3=\left\{\dfrac{14}{3}\right\}$

$K=K_1\cup K_2\cup K_3=\left\{2;\dfrac{14}{3}\right\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $|x-4|+|2x-1|=|x|+3$.



$\Rightarrow$ 4 intervaly

$x\in(-\infty;0\rangle$

$-x+4-2x+1=-x+3$

$2=2x$

$x=1$ Nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\emptyset$

$x\in\left\langle 0;\dfrac{1}{2}\right\rangle$

$-x+4-2x+1=x+3$

$2=4x$

$x=\dfrac{1}{2}$ Patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$x\in\left\langle \dfrac{1}{2};4\right\rangle$

$-x+4+2x-1=x+3$

$0x=0$ Rovnost je splněna pro všechna reálná čísla, ale počítali jsme pouze s čísly z intervalu $\left\langle \dfrac{1}{2};4\right\rangle$. $\Rightarrow$ $K_3=\left\langle \dfrac{1}{2};4\right\rangle$

$x\in\langle 4;\infty)$

$x-4+2x-1=x+3$

$2x=8$

$x=4$ Patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_4=\{4\}$

$K=K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4=\left\langle \dfrac{1}{2};4\right\rangle$

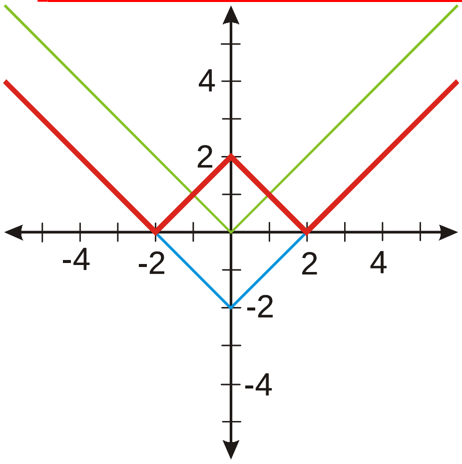
Př. 8: Vyřeš rovnici $\left||x|-2\right|=1$.

Na pravé straně pouze jednička, vlevo vložené absolutní hodnoty $\Rightarrow$ vyřešíme graficky.
Nakreslíme graf funkce na levé straně:

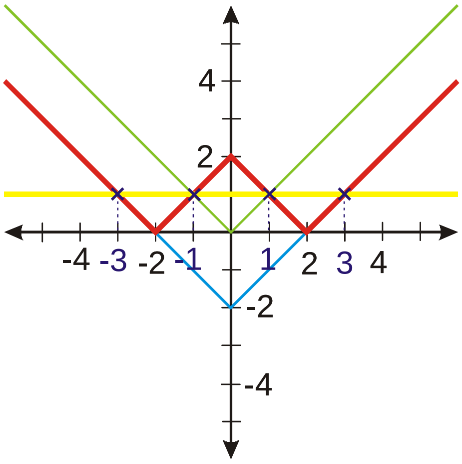
Nakreslíme graf funkce: $y = |x|$.

Nakreslíme graf funkce: $y = |x| - 2$.

Nakreslíme graf funkce: $y = ||x| - 2|$.



Přidáme funkci $y = 1$ (pravá strana) a najdeme průsečíky.



$K = \{-3, -1, 1, 3\}$

Př. 9: Vyřeš rovnici $||x| - 2| = 1$ metodou dělení definičního oboru na intervaly.

Odstraníme nejdříve vnitřní absolutní hodnotu, protože víme, kdy je číslo uvnitř ní kladné nebo záporné. Po úpravě pak budeme dělit dál.

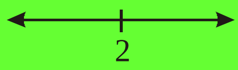
0 $\Rightarrow$ dva intervaly

<table>
<tr>
<td rowspan="2">$x \in (-\infty, 0)$
$|x| = -x$
$|-x - 2| = 1$</td>
<td rowspan="2">-2
$\Rightarrow$ dva intervaly</td>
<td>$x(-\infty, -2)$ $-x - 2 > 0 \Rightarrow |-x - 2| = -x - 2$
$-x - 2 = 1$
$x = -3$ Je v intervalu. $\Rightarrow$ $K_1 = \{-3\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$x \in \langle -2, 0)$ $-x - 2 < 0 \Rightarrow |-x - 2| = x + 2$
$x + 2 = 1$
$x = -1$ Je v intervalu. $\Rightarrow$ $K_2 = \{-1\}$</td>
</tr>
</table>

$x \in \langle 0, \infty)$

$|x| = x$

$|x-2| = 1$



$\Rightarrow$ dva intervaly

$x \in \langle 0, 2 \rangle$ $\quad x-2<0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

$-x+2=1$

$x=1$ Je v intervalu. $\Rightarrow$ $K_3 = \{1\}$

$x \in \langle 2, \infty)$ $\quad x-2>0 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$x-2=1$

$x=3$ Je v intervalu. $\Rightarrow$ $K_4 = \{3\}$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = \{-3;-1;1;3\}$

Př. 10: Petáková:
strana 15/cvičení 22 l) o) q) r)

Shrnutí: Metodu dělení definičního oboru můžeme uplatnit na různě složité příklady. Nesmíme ji však nahradit „zjednodušujícími pravidly“.