

2.4.9 Rovnice s absolutní hodnotou I

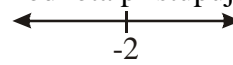
Předpoklady: 2401, 2404, 2405

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny odpovídá přibližně 25 minutám. Je samozřejmě možné ji spojit s následující hodinou, pak ovšem část příkladů nestihnete probrat. Já osobně využívám druhou polovinu hodiny na písemku a příklady 3 a 4 nechávám dopočítat studenty, kteří je nestihnou doma, aby na začátku příští hodiny bylo jasné, kdo má ještě nějaké problémy a potřebuje poradit.

Př. 1: Vyřeš rovnici $|x+2|=1$.

1. způsob – Odstranění absolutní hodnoty dělením definičního oboru na intervaly (jako u funkcí)

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

 $\Rightarrow 2$ intervaly

$$x \in (-\infty; -2) \quad x+2 \leq 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$$

Řešíme rovnici $|x+2|=1$.

$$-x-2=1$$

$$-3=x$$

-3 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_1 = \{-3\}$

$$x \in \langle -2; \infty) \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$$

Řešíme rovnici $|x+2|=1$.

$$x+2=1$$

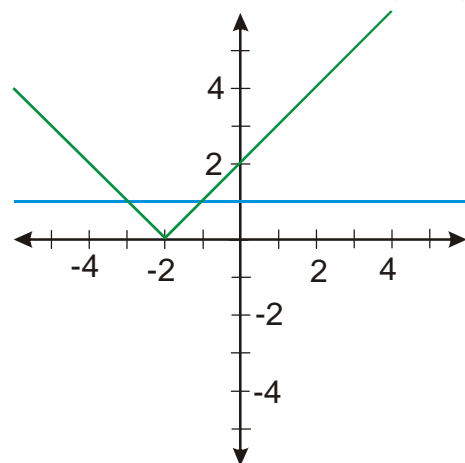
$$x=-1$$

-1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_2 = \{-1\}$

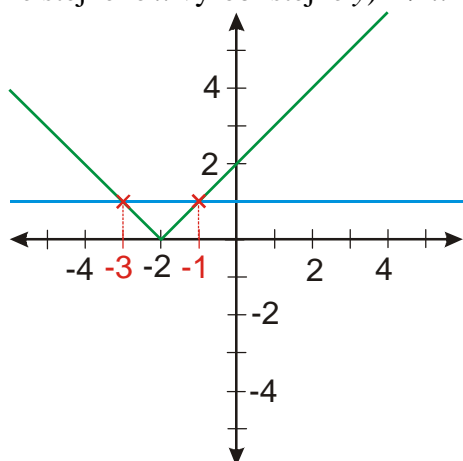
$$K = K_1 \cup K_2 = \{-3; -1\}$$

2. způsob - Grafické řešení

Nakreslíme grafy funkcí: $y=|x+2|$ (levá strana rovnice), a $y=1$ (pravá strana rovnice).



V místech, kde se oba grafy protínají, máme body se stejnými souřadnicemi x i y (obě funkce ze stejného x vyrobí stejné y) \Rightarrow x -ové souřadnice těchto bodů jsou kořeny rovnice.



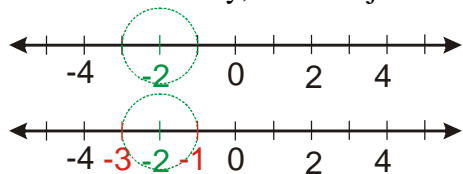
$$K = \{-3, -1\}$$

3. způsob – Využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel

$|a - b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

Vyrobíme v absolutní hodnotě rozdíl: $|x + 2| = |x - (-2)| = 1$.

\Rightarrow Hledáme body, které mají od -2 vzdálenost 1 .



$$K = \{-3, -1\}$$

Metoda dělení definičního oboru je stejnou metodou, jakou jsme používali u kreslení funkcí.

Řešení rovnic

Pomocí vnitřků absolutních hodnot určíme rozdělení na intervaly.
V jednotlivých intervalech nahradíme absolutní hodnoty a získáme lineární rovnice.
Řešíme jednotlivé rovnice.
Zkontrolujeme, zda získané hodnoty patří mezi čísla, se kterými jsme v intervalu počítali.

Kreslení grafů

Pomocí vnitřků absolutních hodnot určíme rozdělení na intervaly.
V jednotlivých intervalech nahradíme absolutní hodnoty a získáme lineární funkce.
Kreslíme jednotlivé funkce.
Z nakreslené funkce vytáhneme pouze část, která patří k intervalu, pro který předpis platí.

Pedagogická poznámka: Pokud chceme vést studenty k tomu, aby se snažili spojovat různé poznatky a omezovali množství toho, co si musejí pamatovat, je úkol přesvědčit je, že oba postupy s dělením na intervaly jsou stejné, docela zásadní.

Poznámka: Podle očekávání jsme získali pomocí všech metod stejné výsledky.

Př. 2: Vyřeš rovnici $|x - 1| = -1$ pomocí všech tří předchozích metod. Metodu dělení definičního oboru použij jako poslední.

1. způsob – Využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel

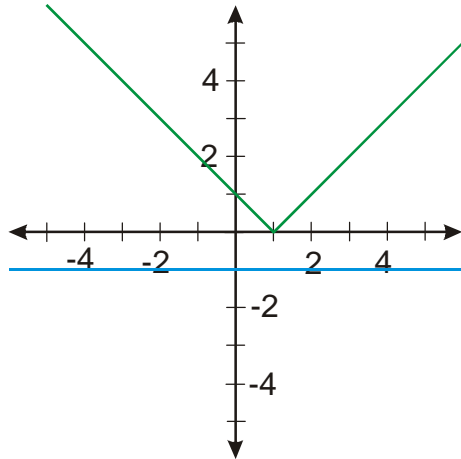
$|a - b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

Zápis: $|x - 1| = -1$ znamená \Rightarrow hledáme body, které mají od 1 vzdálenost $-1 \Rightarrow$ rovnice nemá řešení, protože vzdálenost dvou bodů na číselné ose nemůže být nikdy záporná (nesmysl).

$$K = \emptyset$$

2. způsob - Grafické řešení

Nakreslíme grafy funkcí: $y = |x - 1|$ (levá strana rovnice), a $y = -1$ (pravá strana rovnice).

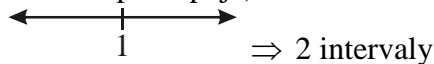


Oba grafy se neprotínají v žádném bodě \Rightarrow rovnice nemá žádné kořeny.

$$K = \emptyset$$

3. způsob – Odstranění absolutní hodnoty dělením definičního oboru na intervaly

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



$$x \in (-\infty; 1) \quad x - 1 \leq 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$$

Řešíme rovnici $|x - 1| = -1$.

$$-x + 1 = -1$$

$$2 = x$$

Zdá se, že jsme našli kořen, ale není to pravda (už víme, že rovnice nemá řešení z ostatních metod). 2 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_1 = \emptyset$

$$x \in (1; \infty) \quad x - 1 \geq 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

Řešíme rovnici $|x - 1| = -1$.

$$x - 1 = -1$$

$$x = 0$$

Zdá se, že jsme našli kořen, ale není to pravda (už víme, že rovnice nemá řešení z ostatních metod). 0 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_2 = \emptyset$

$$K = K_1 \cup K_2 = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Důvod, proč mají studenti používat metodu dělení na intervaly jako poslední je jasný. Ve chvíli, kdy v jednotlivých větvích dojdou ke zdánlivým výsledkům, už ví, že rovnice nemá řešení a tedy musí najít důvod, jak se zdánlivých výsledků zbavit.

Poznámka: Dále budeme používat pouze jednu metodu řešení, nejlépe tu nejjednodušší.

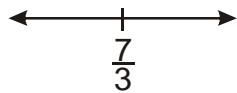
Př. 3: Vyřeš rovnici $|3x-7|=2$.

- Grafické řešení je obtížné a dá se předpokládat, že ve výsledku se budou vyskytovat zlomky \Rightarrow nezískali bychom přesné výsledky.
- Vnitřek absolutní hodnoty se jenom obtížně dá interpretovat jako rozdíl dvou čísel.

\Rightarrow **Řešíme odstraněním absolutní hodnoty dělením definičního oboru na intervaly.**

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní

hodnota přistupuje)? $\Rightarrow 3x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$



\Rightarrow 2 intervaly

$$x \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right) \quad 3x-7 \leq 0 \Rightarrow |3x-7| = -(3x-7) = -3x+7$$

Řešíme rovnici $|3x-7|=2$.

$$-3x+7=2$$

$$-3x=-5$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ Platí } \frac{5}{3} \leq \frac{7}{3}. \Rightarrow \text{Číslo } \frac{5}{3} \text{ je mezi čísly, se kterými jsme počítali.} \Rightarrow K_1 = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

$$x \in \left(\frac{7}{3}; \infty\right) \quad 3x-7 \geq 0 \Rightarrow |3x-7| = 3x-7$$

Řešíme rovnici $|3x-7|=2$.

$$3x-7=2$$

$$3x=9$$

$$x=3$$

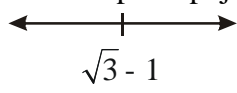
$$\text{Platí } 3 \geq \frac{7}{3}. \Rightarrow \text{Číslo } 3 \text{ je mezi čísly, se kterými jsme počítali.} \Rightarrow K_2 = \{3\}$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left\{\frac{5}{3}; 3\right\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $|x-\sqrt{3}+1|=2-\sqrt{3}$.

Opět zvolíme metodu dělení definičního oboru na intervaly.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje?) $\Rightarrow x-\sqrt{3}+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}-1 \doteq 0,73$



\Rightarrow 2 intervaly

$$x \in \left(-\infty; \sqrt{3}-1\right) \quad x-\sqrt{3}+1 \leq 0 \Rightarrow |x-\sqrt{3}+1| = -(x-\sqrt{3}+1) = -x+\sqrt{3}-1$$

Řešíme rovnici $|x-\sqrt{3}+1|=2-\sqrt{3}$.

$$-x+\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$$

$$x=2\sqrt{3}-3 \doteq 0,46$$

$2\sqrt{3}-3$ patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_1 = \{2\sqrt{3}-3\}$

$$x \in \langle \sqrt{3}-1; \infty \rangle \quad x - \sqrt{3} + 1 \geq 0 \Rightarrow |x - \sqrt{3} + 1| = x - \sqrt{3} + 1$$

Řešíme rovnici $|x - \sqrt{3} + 1| = 2 - \sqrt{3}$.

$$x - \sqrt{3} + 1 = 2 - \sqrt{3}$$

$$x = 1$$

1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_2 = \{1\}$

$$K = K_1 \cup K_2 = \{2\sqrt{3}-3; 1\}$$

Př. 5: Petáková:
strana 15/cvičení 15 c) e) f) h)

Shrnutí: Rovnice s absolutní hodnotou si rozdělením definičního oboru na intervaly převedeme na lineární rovnice. Postup se shoduje se způsobem, jakým jsme kreslili grafy.