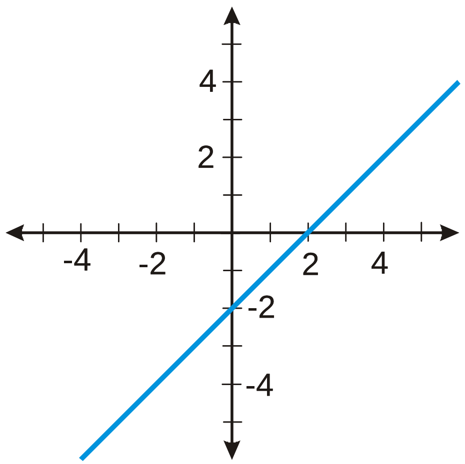
2.4.7 Omezenost funkcí, maximum a minimum

Předpoklady: 2203, 2402

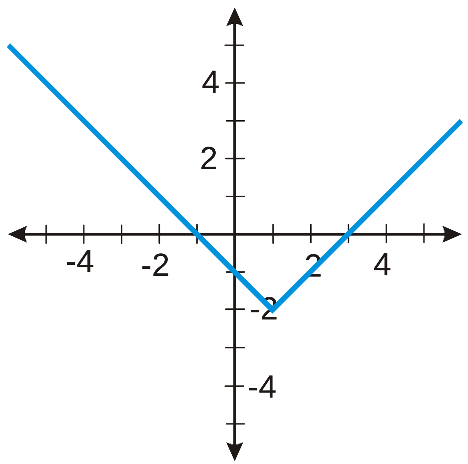
Př. 1: Nakresli vedle sebe grafy funkcí: $y_1 = x-2$, $y_2 = |x-1|-2$, $y_3 = \left|\frac{1}{x}\right|$. Urči jejich obory hodnot.



$H(f) = R$

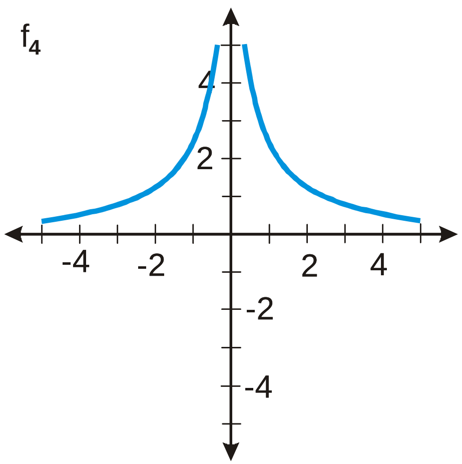
Funkce může nabýt všech hodnot.

Funkce není omezená
(může jít do libovolně malých i libovolně velkých hodnot).



$H(f) = \langle -2;\infty)$

Jakých hodnot nabývá funkce?
Funkce nabývá pouze hodnot větších než nebo rovných -2. (ale i hodnot větších než –3 nebo –100).



$H(f) = (0;\infty)$

Funkce nabývá pouze hodnot větších než 0. (ale i hodnot větších než –3 nebo –100).

Funkce je zdola omezená
(nemůže jít do libovolně malých hodnot, zezdola ji něco omezuje v rozletu).

Jak definice?

Funkce je zdola omezená právě když existuje takové číslo $d \in R$, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq d$.

Určí číslo *d* z předchozí definice.

$d = -2; -3; -\pi; -1620; \ldots$

nekonečně mnoho takových čísel $d \in (-\infty;-2\rangle$

$d = 0; -1; -2; -\pi; -2006; \ldots$

nekonečně mnoho takových čísel $d \in (-\infty;-0\rangle$

Co znamená rozdíl v typech oboru hodnot (zleva uzavřený x zleva otevřený interval).

Funkce má pro $x = 1$ nejmenší hodnotu $y = -2$.

Funkce nemá nejmenší hodnotu, platí $f(10) = \frac{1}{10}$; $f(100) = \frac{1}{100}$ atd. Hodnoty se pro zvětšující se *x* zmenšují, ale pořád jsou větší než 0 a žádná z nich není nejmenší (jak se tam vejdou? – to jsou ty nekonečna)

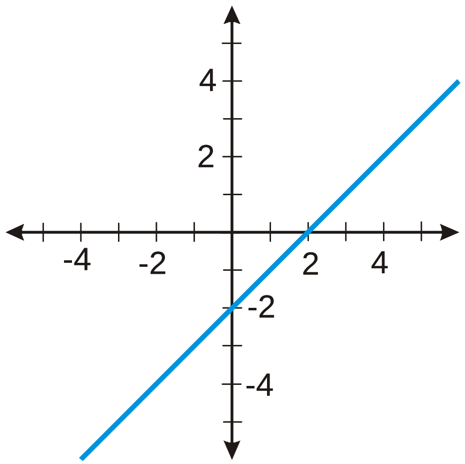
Funkce má minimum pro $x = 1$ s hodnotou $y = -2$.
Jak napsat definici, aby se lišila od definice omezené funkce?
To číslo, které je menší než hodnoty funkce musí být hodnota funkce pro nějaké *x*.
Definice?
Funkce $f(x)$ má minimum právě, když existuje $x_0 \in D(f)$ takové, že pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$

Co je vzácnější existence minima nebo omezenost zdola?
Existence minima. Už z tabulky je vidět, že existuje zdola omezená funkce bez minima. Pokud má ale funkce minimum musí být omezená (při nejhorším hodnotou minima).
Platí: existuje minimum $\Rightarrow$ omezenost zdola

Pedagogická poznámka: Studenti v tomto okamžiku neví, jak vypadá graf funkce $y = \left|\frac{1}{x}\right|$. Proto jim na tabuli nakreslím graf funkce $y = \frac{1}{x}$ s tím, že zbytek musí vyřešit sami (stejným způsobem jako dosud řešili grafy funkcí s absolutní hodnotou).

Př. 2: Nakresli grafy tří funkcí tak, aby:
a) jedna nebyla omezená
b) jedna byla shora omezená, ale neměla maximum
c) jedna měla maximum.
Vytvoř obdobnou tabulku jakou jsme měli u funkcí omezených zdola. Doplň do ní všechny definice.

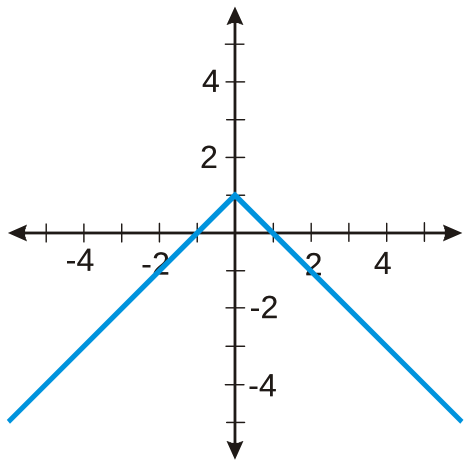
$y_1 = x - 2$ $\qquad$ $y_2 = 1 - |x|$ $\qquad$ $y_3 = -\left|\frac{1}{x}\right|$



$H(f) = R$

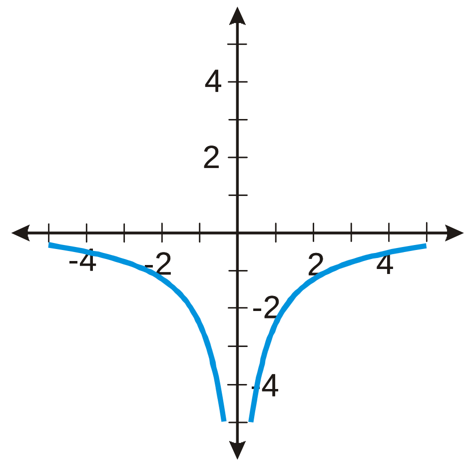
Funkce může nabýt všech hodnot.

Funkce není omezená
(může jít do libovolně malých i libovolně velkých hodnot).



$H(f) = (-\infty; 1\rangle$

Jakých hodnot nabývá funkce?
Funkce nabývá pouze hodnot menších než nebo rovných 1. (ale i hodnot menších než 12 nebo 1989).



$H(f) = (-\infty; 0)$

Funkce nabývá pouze hodnot menších než 0. (ale i hodnot menších než 3 nebo 100).

Funkce je shora omezená
(nemůže jít do libovolně velkých hodnot, seshora ji něco omezuje v rozletu).

Jak definice?
Funkce je shora omezená právě když existuje takové číslo $D \in R$, že pro všechna $x \in D(f)$ platí

$$f(x) \leq D.$$

Urči číslo D z předchozí definice.

$d = 2; 3; \pi; 1278; \ldots$

nekonečně mnoho takových čísel $D \in \langle 1; \infty)$

$d = 0; 1; 2; \pi; 1848; \ldots$

nekonečně mnoho takových čísel $D \in \langle 0; \infty)$

Co znamená rozdíl v typech oboru hodnot (zprava uzavřený x zprava otevřený interval).

Funkce má největší hodnotu pro $x = 0$, dosahuje největší hodnotu $y = 1$.

Funkce nemá nejmenší hodnotu, platí $f(10) = -\frac{1}{10}$; $f(100) = -\frac{1}{100}$ atd. Hodnoty se pro zvětšující se x zvětšují, ale pořád jsou menší než 0 a žádná z nich není největší (jak se tam vejdou? – to jsou ty nekonečna)

Funkce má maximum pro $x = 0$ s hodnotou $y = 1$.

Jak napsat definici, aby se lišila od definice omezené funkce?
To číslo, které je větší než hodnoty funkce musí být hodnota funkce pro nějaké *x*.
Definice?
Funkce $f(x)$ má maximum právě, když existuje $x_0 \in D(f)$ takové, že pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$

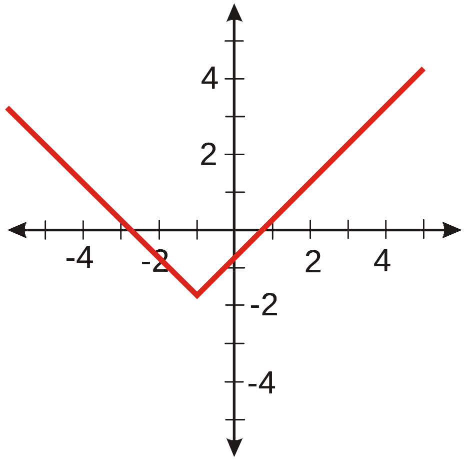
Pedagogická poznámka: Všechny definice by studenti měli napsat samostatně. Pokud nás tlačí čas, část vyplňování přeskakujeme.

Funkce, která je omezená zdola i shora se nazývá omezená.

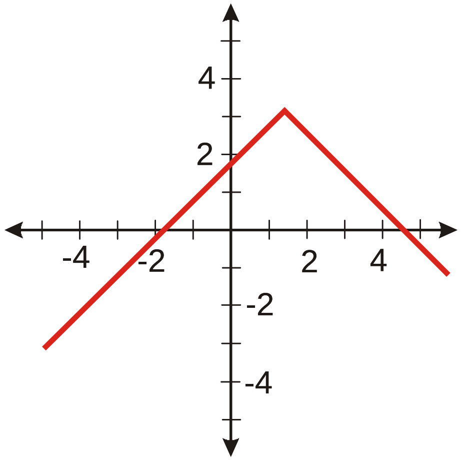
Př. 3: Najdi lineární funkci, která je omezená.

Každá konstantní funkce je omezená.

Př. 4: Nakresli grafy funkcí $y_1 = |x+1| - \sqrt{3}$ a $y_2 = -\left|\sqrt{2} - x\right| + \pi$ a urči obor hodnot, zda jsou omezené, zdola, shora omezené, zda mají maximum či minimum a kdy jsou rostoucí a kdy klesající.



$H(f) = \left\langle -\sqrt{3}; \infty \right)$
omezená zdola
není omezená
má minimum pro $x = -1$ s hodnotou $y = -\sqrt{3}$ (tedy minimum v bodě $\left[-1; -\sqrt{3}\right]$)
rostoucí v intervalu $\langle 1; \infty)$
klesající v intervalu $(-\infty; -1\rangle$



$H(f) = (-\infty; \pi\rangle$
omezená shora
není omezená
má maximum pro $x = \sqrt{2}$ s hodnotou $y = \pi$ (tedy maximum v bodě $\left[\sqrt{2}; \pi\right]$)
rostoucí v intervalu $\left(-\infty; \sqrt{2}\right\rangle$
klesající v intervalu $\left\langle \sqrt{2}; \infty\right)$

Pedagogická poznámka: Je dobré studenty upozornit na to, že při určování minima je potřeba uvádět obě souřadnice. Příkladně nakreslit na tabuli dva jednoduché příklady.

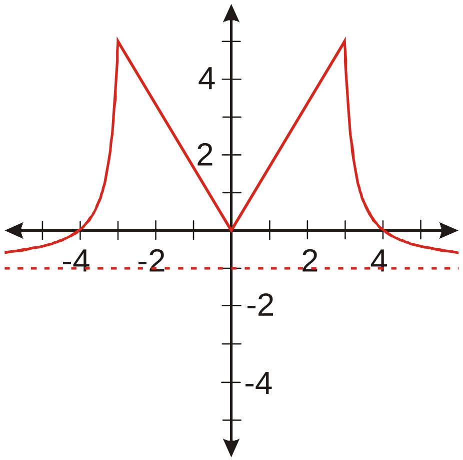
Př. 5: Nakresli graf libovolné funkce, která splňuje najednou následující podmínky:

a) $D(f) = R$

b) funkce je omezená, má maximum 5 v bodě $x = 3$, nemá minimum

c) funkce je sudá

d) funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0;2 \rangle$



Řešení je mnoho, je nutné zkontrolovat, co nakreslí studenti.

Shrnutí: Funkce je omezená, je-li omezený její obor hodnot.