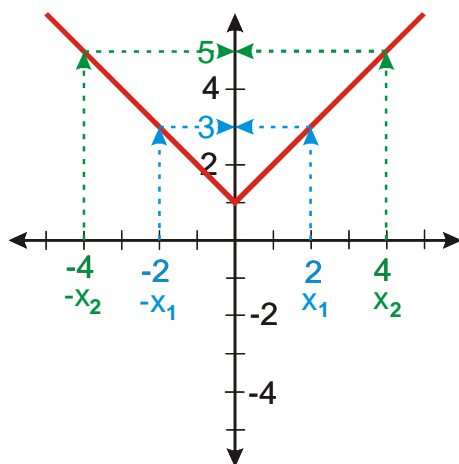


2.4.6 Sudé a liché funkce

Předpoklady: 2203, 2402

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi ty, ve kterých se toho moc nestihne. Pokud si však studenti mají nakreslit obrázky sami, není jiná možnost.

Př. 1: Nakresli vedle sebe grafy funkcí: $y_1 = |x| + 1$, $y_2 = 2x$, $y_3 = |x + 2|$. S pomocí nakreslených grafů prozkoumej, jakým způsobem souvisí hodnoty těchto funkcí pro navzájem opačná čísla.



Hodnoty navzájem opačných čísel jsou shodné.

Jde o speciální vlastnost. Jak se jmenuje?

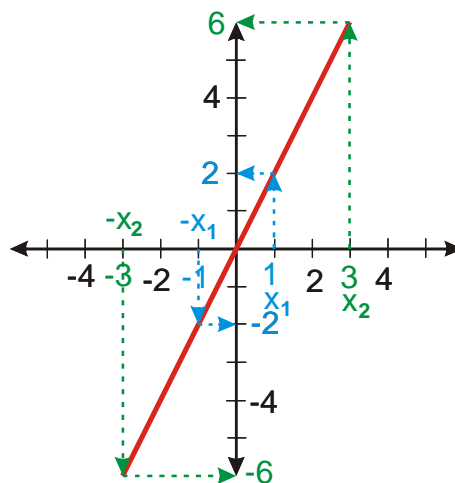
Funkce $y_1 = |x| + 1$ se nazývá **sudá funkce**.

Graf je souměrný podle osy y .

Jak sestavit definici? Zapiš vlastnost v první řádce pod grafem pomocí $f(x)$ a $f(-x)$.

$$f(x) = f(-x)$$

Celá definice:



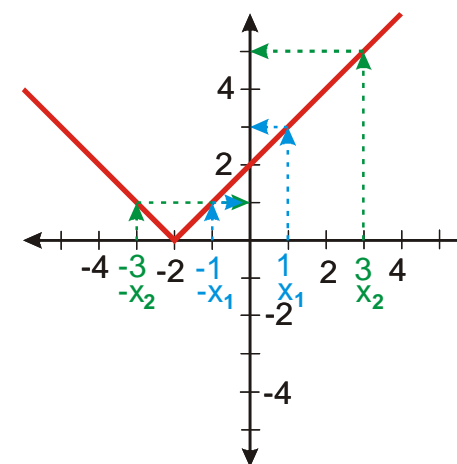
Hodnoty navzájem opačných čísel jsou čísla navzájem opačná.

Funkce $y_2 = 2x$ se nazývá **lichá funkce**.

Jak poznáme z grafu?

Graf je středově souměrný podle počátku (bod $[0; 0]$).

$$f(x) = -f(-x)$$



Mezi hodnotami navzájem opačných čísel není žádný viditelný vztah.

Nemá vlastnost, nemá žádné speciální pojmenování.

Funkce $f(x)$ se nazývá sudá, právě když najednou platí:

1) je-li $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$

2) pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$

Dokaž z definice pro uvedené funkce, že mají uvedené vlastnosti

Bod 1) – jasné $D(f) = R$, pro každé x najdeme číslo

opačné

Bod 2) máme $x, -x$, chceme $f(x) = f(-x)$.

Dosadíme za $f(x) = |x| + 1$, $f(-x) = |-x| + 1$.

Napíšeme rovnost a upravujeme než bude zřejmá:

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) = |x| + 1 = |-x| + 1 = f(-x)$$

$$|x| + 1 = |(-1)x| + 1$$

$$|x| + 1 = |(-1)||x| + 1$$

$$|x| + 1 = 1|x| + 1$$

$|x| + 1 = 1|x| + 1$ - rovnost platí. \Rightarrow funkce je sudá

Kde se vzalo pojmenování? – Uvidíme, ale logiku to má.

Funkce $f(x)$ se nazývá lichá, právě když najednou platí:

1) je-li $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$

2) pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = -f(-x)$

Bod 1) – jasné $D(f) = R$, pro každé x najdeme číslo

opačné

Bod 2) máme $x, -x$, chceme $f(x) = -f(-x)$.

Dosadíme za $f(x) = 2x$, $f(-x) = 2(-x)$.

Napíšeme rovnost a upravujeme než bude zřejmá:

$$f(x) = -f(-x)$$

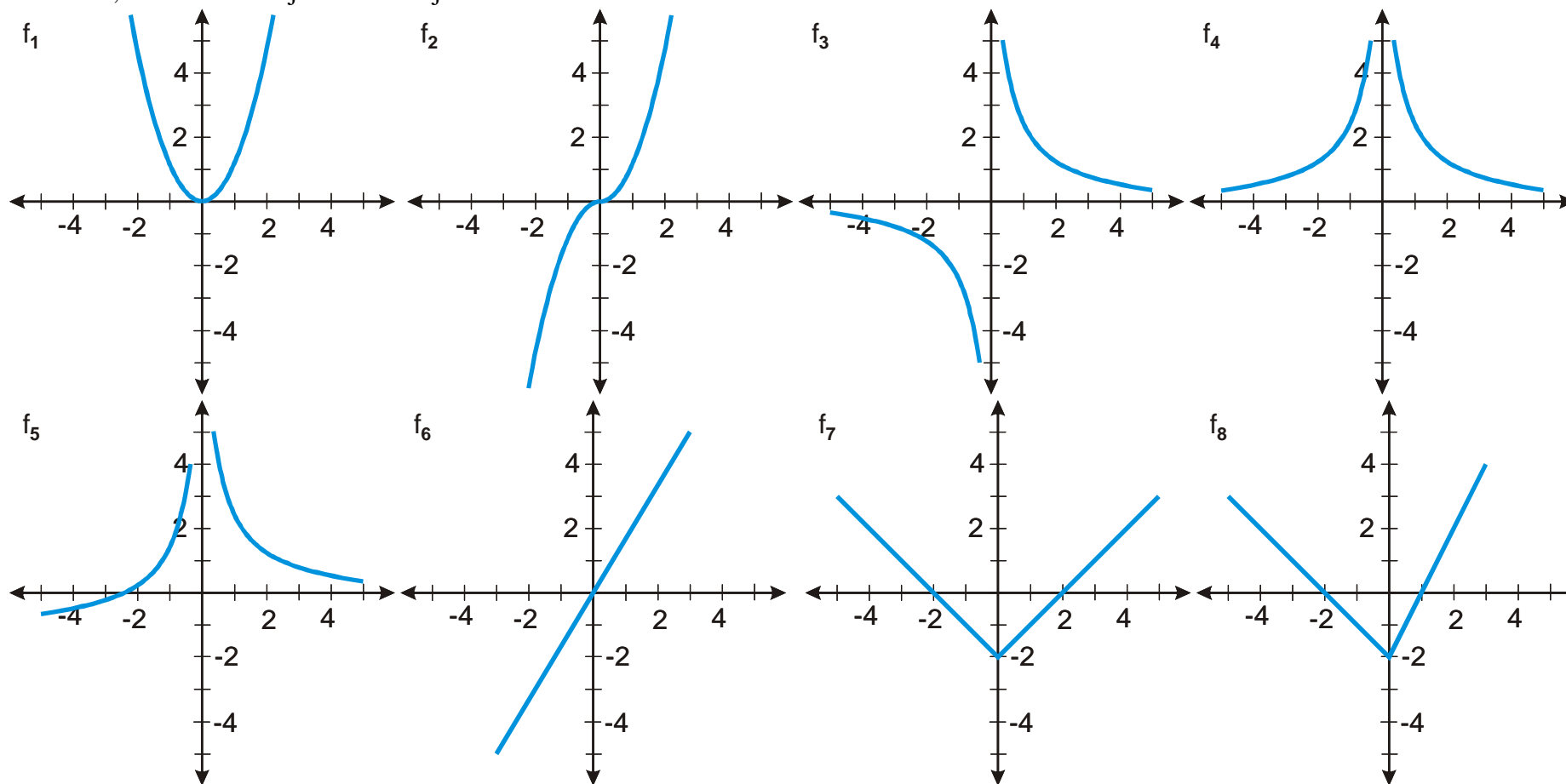
$$f(x) = 2x = -2(-x) = -f(-x)$$

$$2x = -2(-x)$$

$2x = 2x$ - rovnost platí \Rightarrow funkce je lichá

Pedagogická poznámka: Nechám studenty namalovat grafy (jejich kreslení je možné pojmout jako zkoušení na znamínka) a snažím se je donutit k tomu, aby začali zkoumat souvislost hodnot opačných čísel. Většinou třídy je však po chvíli nutné ukázat, co si pod tím mají představit. Obě vlastnosti si pojmenujeme, studenti samostatně vymyslí poznávací znamení z grafů. Zápis definice si ukážeme pro lichou funkci, pro sudou ji mají napsat studenti samostatně (pokud si neukážete zápisy rovnosti $f(x) = -f(-x)$ je tento postup lepší, protože uvedená rovnost je pro studenty dost náročná). Důkaz vlastnosti si ukážeme pro sudou, samostatný důkaz pro lichou funkci zůstává pro dobrovolníky nebo na konec hodiny.

Př. 2: Rozhodni, které z následujících funkcí jsou sudé nebo liché.



Sudé jsou funkce: $f_1; f_4; f_7$.

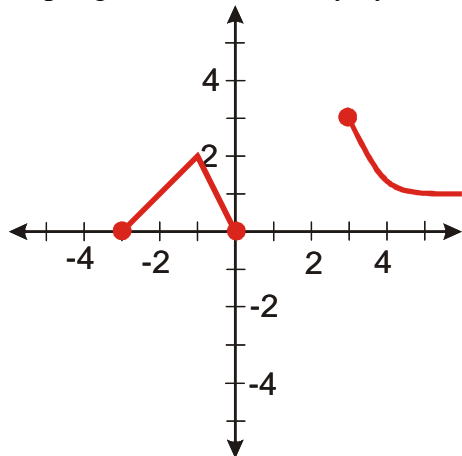
Liché jsou funkce: $f_2; f_3; f_6$.

Pedagogická poznámka: Při řešení předchozího příkladu chodím po třídě a s některými studenty diskutuji o tom, co je pro jejich obrázek důležité a co by mohli kvůli rychlosti vynechat. Obecně často platí, že ti, kteří by nejvíce potřebovali pracovat samostatně, kreslí všechno velice pečlivě, aby stihli pouze opsat správné řešení z projektoru.

Př. 3: Existuje funkce, která je lichá i sudá zároveň?

Ano, jde o funkci $y = 0$.

Př. 4: Doplň graf funkce tak, aby byla: a) sudá b) lichá.

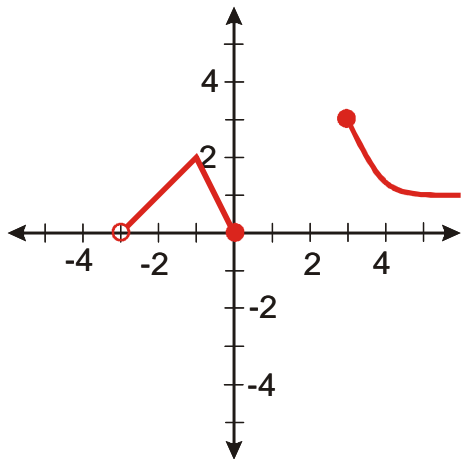


Příklad není možné vyřešit, protože platí $f(3) = 3$ a zároveň $f(-3) = 0$. Graf funkce tedy už nyní nespĺňuje podmínku pro sudost $f(3) = f(-3)$ ani podmínku pro lichost $f(3) = -f(-3)$. Když do grafu přidáme další body na tomto faktu se nic nezmění.

Pedagogická poznámka: Určitě není překvapením, že mnoho studentů příklad, který není řešitelný, hravě vyřeší. Další sice mají pocit, že něco není v pořádku, ale jen málo z nich překoná zábrany a ozve se.

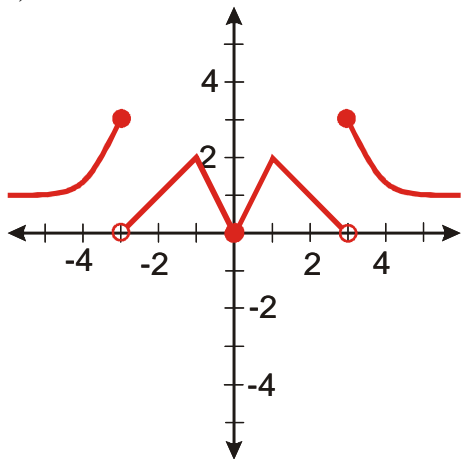
Př. 5: Uprav předchozí graf tak, aby byl předchozí úkol splnitelný.

Stačí jeden ze jmenovaných bodů odstranit abychom hodnotu pro opačné x mohli stanovit tak, jak to vyžaduje odpovídající definice.

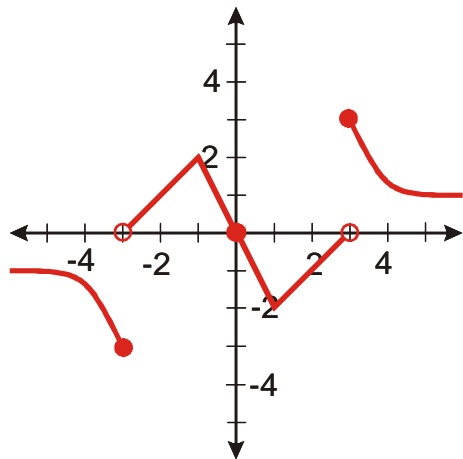


Př. 6: Doplň upravený graf funkce tak, aby byla: a) sudá b) lichá.

a) sudá



b) lichá



Shrnutí: Funkce, u kterých souvisí hodnoty navzájem opačných čísel, nazýváme sudé (platí $f(x) = f(-x)$) nebo liché (platí $f(x) = -f(-x)$).