

## 2.4.5 Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru II

**Předpoklady:** 2404

Opakování: Pokud se v částech definičního oboru funkce chová různým způsobem rozdělíme si definiční obor na části a v každé z nich řešíme graf samostatně.

Pro absolutní hodnoty:

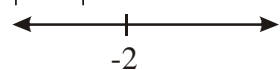
- zjistíme, kdy se mění znaménko uvnitř a tím rozdělíme definiční obor na intervaly
- v každém intervalu odstraníme všechny absolutní hodnoty a vypočteme výslednou funkci
- pro každou funkci nakreslíme graf
- každý z grafů vytáhneme v intervalu, pro který platí.

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako v předchozí hodině se dá očekávat obrovský rozptyl v rychlosti postupu. Hlavně u příkladu 3 je však třeba dát pozor, aby rychlejší studenti neměli příklad špatně (kvůli odstraňování absolutní hodnoty).

**Př. 1:** Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce  $y = |x+2| + x - 1$ .

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x+2|: x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



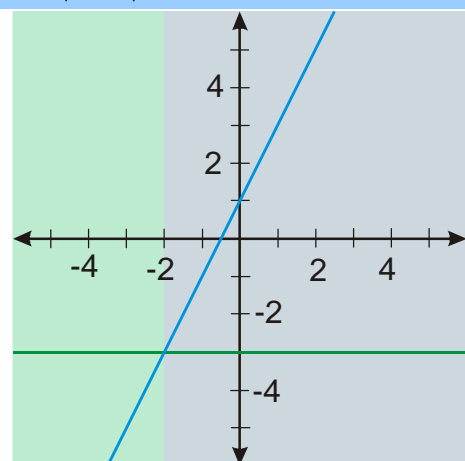
$\Rightarrow$  dva intervaly

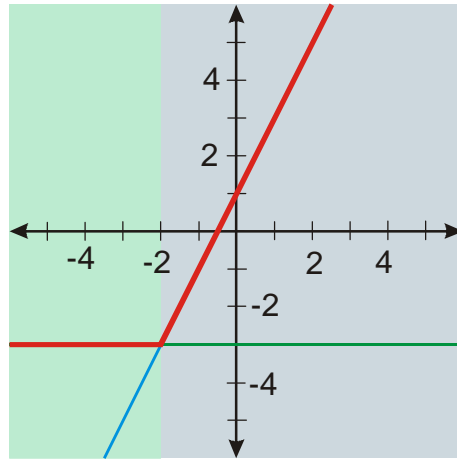
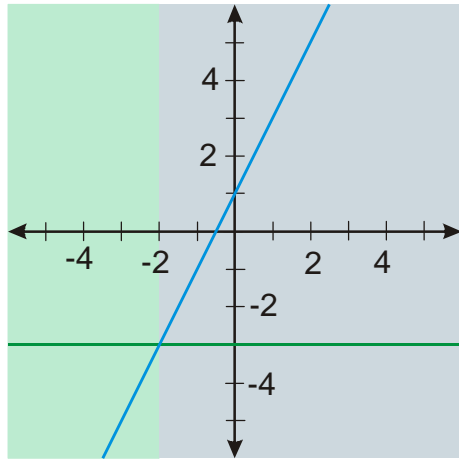
$$1) x \in (-\infty; -2) \quad x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -x-2$$

$$y = |x+2| + x - 1 = -x - 2 + x - 1 = -3$$

$$2) x \in (-2; \infty) \quad x+2 > 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$$

$$y = |x+2| + x - 1 = x + 2 + x - 1 = 2x + 1$$



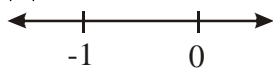


**Př. 2:** Nakresli graf funkce  $y = |x+1| + |x| + 1$ .

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$$|x+1|: x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$|x|: x=0$$



$\Rightarrow$  tři intervaly

$$1) x \in (-\infty; -1) \quad x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1 \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

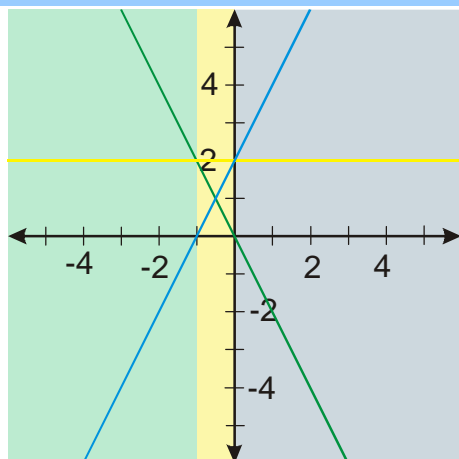
$$y = |x+1| + |x| + 1 = -x-1 - x + 1 = -2x$$

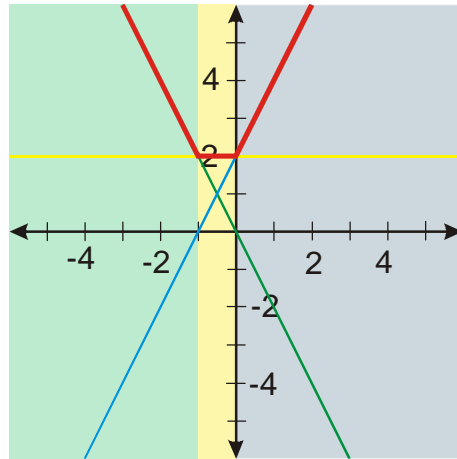
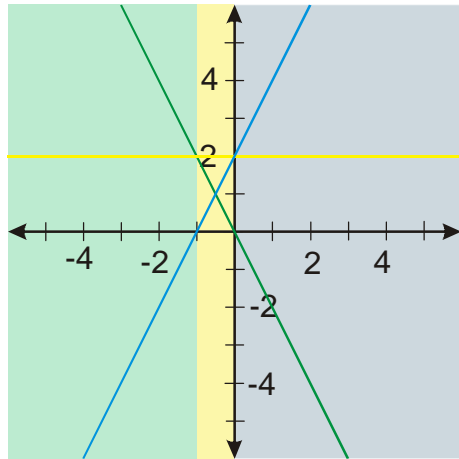
$$2) x \in (-1; 0) \quad x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = |x+1| + |x| + 1 = x+1 - x + 1 = 2$$

$$3) x \in (0; \infty) \quad x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \quad x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = |x+1| + |x| + 1 = x+1 + x + 1 = 2x+2$$





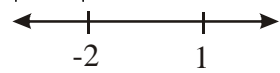
**Pedagogická poznámka:** V předchozím příkladu se pozná, kteří studenti mají opravdu jasno v důvodech, které vedou k zapisování intervalů, pro které platí vypočítané funkce. Pro ty, kteří dosud postupovali automaticky, bude potřeba příklad částečně vyřešit na tabuli. Já počítám předpis funkce v prvním intervalu, zbývající dva nechávám na studentech a kontrolujeme je až později.

**Př. 3:** Nakresli graf funkce  $y = |1 - x| + |2 + x| - x$ .

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$$|1 - x|: 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$|2 + x|: 2 + x = 0 \Rightarrow x = -2$$



$\Rightarrow$  tři intervaly

$$1) x \in (-\infty; -2) \quad 1 - x > 0 \Rightarrow |1 - x| = 1 - x \quad 2 + x < 0 \Rightarrow |2 + x| = -2 - x$$

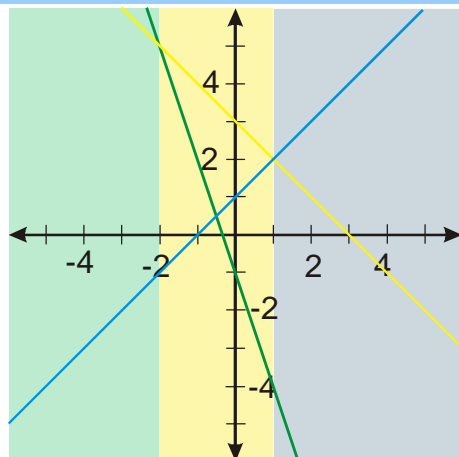
$$y = |1 - x| + |2 + x| - x = 1 - x - 2 - x - x = -1 - 3x$$

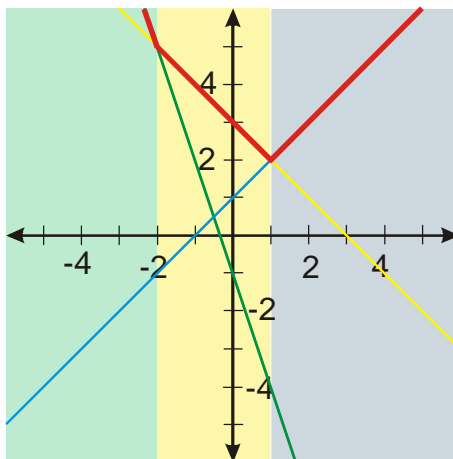
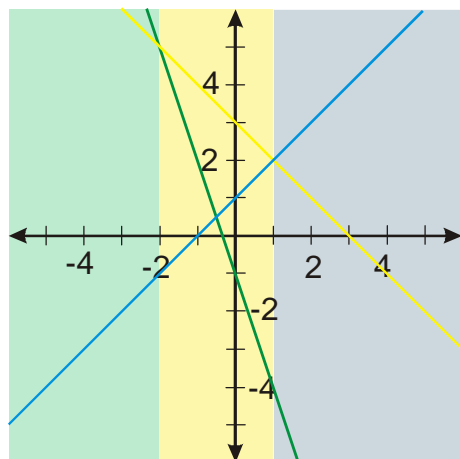
$$2) x \in (-2; 1) \quad 1 - x > 0 \Rightarrow |1 - x| = 1 - x \quad 2 + x > 0 \Rightarrow |2 + x| = 2 + x$$

$$y = |1 - x| + |2 + x| - x = 1 - x + 2 + x - x = 3 - x$$

$$3) x \in (1; \infty) \quad 1 - x < 0 \Rightarrow |1 - x| = -1 + x \quad 2 + x > 0 \Rightarrow |2 + x| = 2 + x$$

$$y = |1 - x| + |2 + x| - x = -1 + x + 2 + x - x = 1 + x$$





**Pedagogická poznámka:** Studenti mají problémy s odstraňováním absolutní hodnoty  $|1-x|$ , je třeba dát pozor, aby rychlejší studenti neměli tuto chybu v sešitu příliš dlouho.

**Př. 4:** Nakresli graf funkce  $y = |2x-1| - |1-x| + x - 1$ .

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$$|2x-1|: \quad 2x-1=0 \Rightarrow x=0,5$$

$$|1-x|: \quad 1-x=0 \Rightarrow x=1$$



$\Rightarrow$  tři intervaly

$$1) \quad x \in (-\infty; 0,5) \quad 2x-1 < 0 \Rightarrow |2x-1| = -2x+1 \quad 1-x > 0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$$

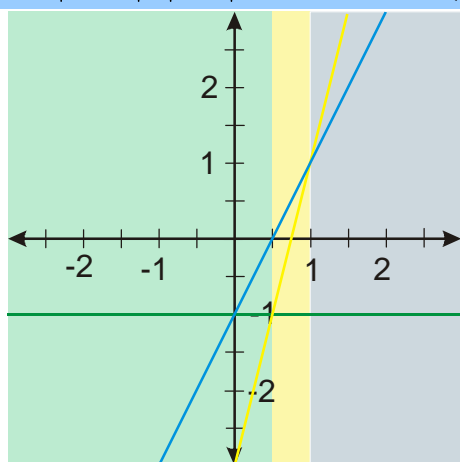
$$y = |2x-1| - |1-x| + x - 1 = -2x+1 - (1-x) + x - 1 = -1$$

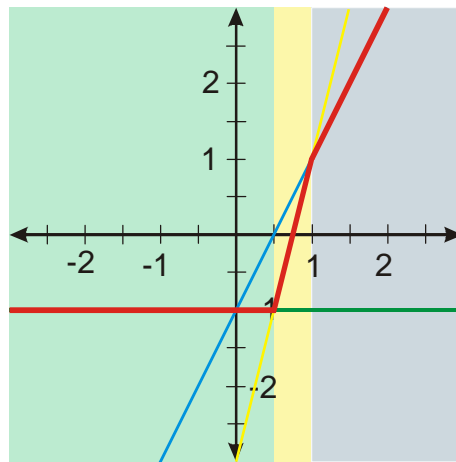
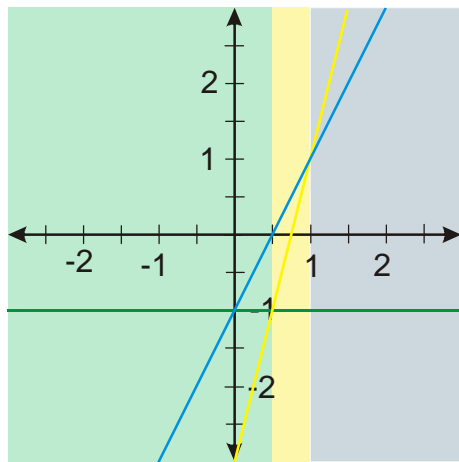
$$2) \quad x \in (0,5; 1) \quad 2x-1 > 0 \Rightarrow |2x-1| = 2x-1 \quad 1-x > 0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$$

$$y = |2x-1| - |1-x| + x - 1 = 2x-1 - (1-x) + x - 1 = 4x-3$$

$$3) \quad x \in (1; \infty) \quad 2x-1 > 0 \Rightarrow |2x-1| = 2x-1 \quad 1-x < 0 \Rightarrow |1-x| = -1+x$$

$$y = |2x-1| - |1-x| + x - 1 = 2x-1 - (-1+x) + x - 1 = 2x-1$$





- Př. 5:** Na základě výsledků příkladů v této a předchozí rovině navrhní:
- volbu bodů, ve kterých je nutné počítat funkční hodnoty při kreslení grafů částečných lineárních funkcí vzniklých v jednotlivých intervalech
  - nejrychlejší způsob řešení obtížnějších příkladů

Všechny zkonstruované grafy byly lomené nepřerušované čáry  $\Rightarrow$

**a)** Pro kreslení jednotlivých lineárních funkcí je nejlepší volit hodnoty v nulových bodech, protože získané body náleží vždy dvěma částečným funkcím v intervalech, které v daném nulovém bodu sousedí.

**b)** Pro zakreslení jednotlivých částečných lineárních funkcí nám stačí hodnoty v nulových bodech, které ohraničují interval, pro který lineární funkci kreslíme  $\Rightarrow$  nejrychleji můžeme postupovat takto:

- najdeme nulové body
- určíme hodnoty funkce v nulových bodech (a tedy i všechny částečné lineární funkce v omezených intervalech)
- určíme předpisy částečných lineárních funkcí v neomezených intervalech (nebo další dvě funkční hodnoty)
- dokreslíme graf funkce

**Př. 6:** Pomocí úspornější metody z předchozího úkolu nakresli graf funkce

$$y = |x - 4| - |2x - 4| + |x + 3| - |1 - x| + 2|x| - 4.$$

Procházíme jednotlivé nulové body a počítáme funkční hodnoty:

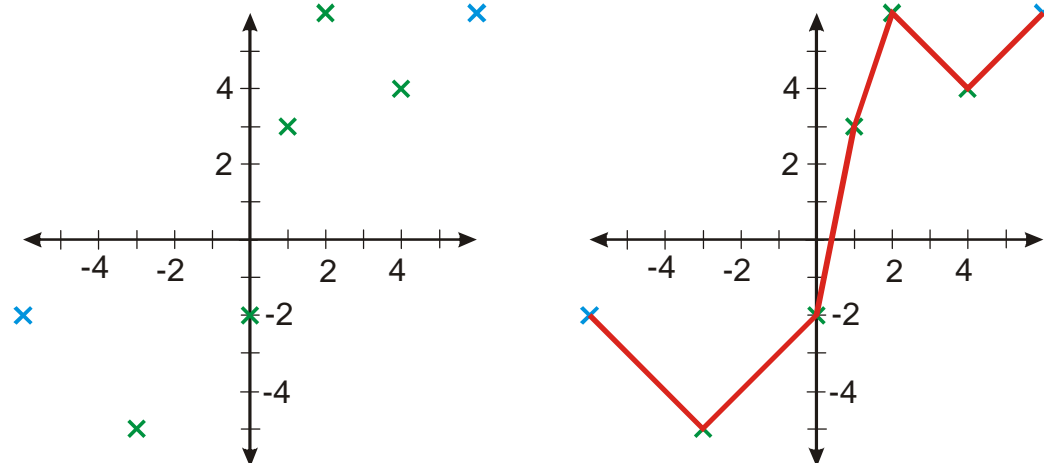
- $|x - 4| \Rightarrow x = 4$   
 $y = |x - 4| - |2x - 4| + |x + 3| - |1 - x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |4 - 4| - |2 \cdot 4 - 4| + |4 + 3| - |1 - 4| + 2|4| - 4 = 4$   
 $\Rightarrow$  bod  $[4; 4]$
- $|2x - 4| \Rightarrow x = 2$   
 $y = |x - 4| - |2x - 4| + |x + 3| - |1 - x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |2 - 4| - |2 \cdot 2 - 4| + |2 + 3| - |1 - 2| + 2|2| - 4 = 6$   
 $\Rightarrow$  bod  $[2; 6]$

- $|x+3| \Rightarrow x = -3$   
 $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |(-3)-4| - |2 \cdot (-3)-4| + |(-3)+3| - |1-(-3)| + 2|(-3)| - 4 = -5$   
 $\Rightarrow \text{bod } [-3; -5]$
- $|1-x| \Rightarrow x = 1$   
 $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |1-4| - |2 \cdot 1-4| + |1+3| - |1-1| + 2|1| - 4 = 3$   
 $\Rightarrow \text{bod } [1; 3]$
- $|x| \Rightarrow x = 0$   
 $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |0-4| - |0 \cdot 1-4| + |0+3| - |1-0| + 2|0| - 4 = -2$   
 $\Rightarrow \text{bod } [0; -2]$

Dopočteme hodnotu pro  $x$  menší než nejmenší nulový bod a pro  $x$  větší než největší nulový bod:

- $x = 6$   
 $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |6-4| - |2 \cdot 6-4| + |6+3| - |1-6| + 2|6| - 4 = 6$   
 $\Rightarrow \text{bod } [6; 6]$
- $x = -6$   
 $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$   
 $= |(-6)-4| - |2 \cdot (-6)-4| + |(-6)+3| - |1-(-6)| + 2|(-6)| - 4 = -2$   
 $\Rightarrow \text{bod } [-6; -2]$

Zakreslíme do grafu vypočtené body a poté je spojíme lomenou čarou:

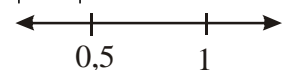


**Dodatek:** Na první pohled se zdá, že jsme od začátku měli používat metodu z předchozího příkladu. Tato metoda má však dvě zásadní nevýhody:  
 1. Není z ní příliš dobře vidět na čem metoda stojí.  
 2. Není možné ji použít pro jiné druhy funkcí s absolutními hodnotami (tyto funkce nás čekají v dalších kapitolách).

**Př. 7:** (BONUS) Nakresli graf funkce  $y = \left| |x+1| - 1 \right| + x + 1$ .

Zjištění nulových bodů bude problém, pro vnější absolutní hodnotu nevíme, jaká čísla dodá vnitřní absolutní hodnota  $\Rightarrow$  nejdříve odstraním vnitřní absolutní hodnotu:

$$|x+1|: x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



$\Rightarrow$  tři intervaly

**1)**  $x \in (-\infty; -1)$

$$x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1$$

$$y = \left| |x+1| - 1 \right| + x + 1 = \left| -x-1-1 \right| + x + 1 = \left| -x-2 \right| + x + 1$$

ted' odstraníme vnější absolutní hodnotu

$$|-x-2|: -x-2=0 \Rightarrow x=-2$$

**1)a)**  $x \in (-\infty; -2)$

$$-x-2 > 0 \Rightarrow |-x-2| = -x-2$$

$$y = |-x-2| + x + 1 = -x-2 + x + 1 = -1$$

**1)b)**  $x \in (-2; -1)$

$$-x-2 < 0 \Rightarrow |-x-2| = -(-x-2) = x+2$$

$$y = |-x-2| + x + 1 = x+2 + x + 1 = 2x+3$$

**2) vracíme se k vnitřní absolutní hodnotě**

$x \in (-1; \infty)$

$$x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$y = \left| |x+1| - 1 \right| + x + 1 = \left| x+1-1 \right| + x + 1 = |x| + x + 1$$

ted' odstraníme vnější absolutní hodnotu

$$|x|: x=0$$

**2)a)**  $x \in (-1; 0)$

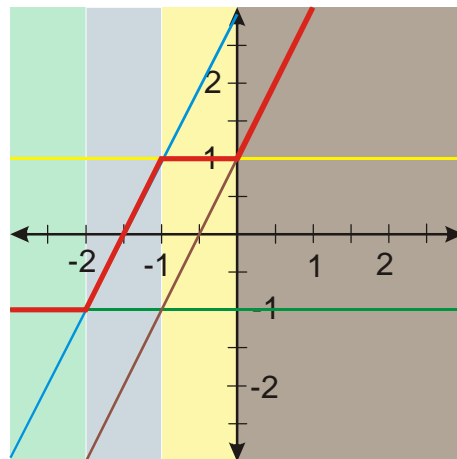
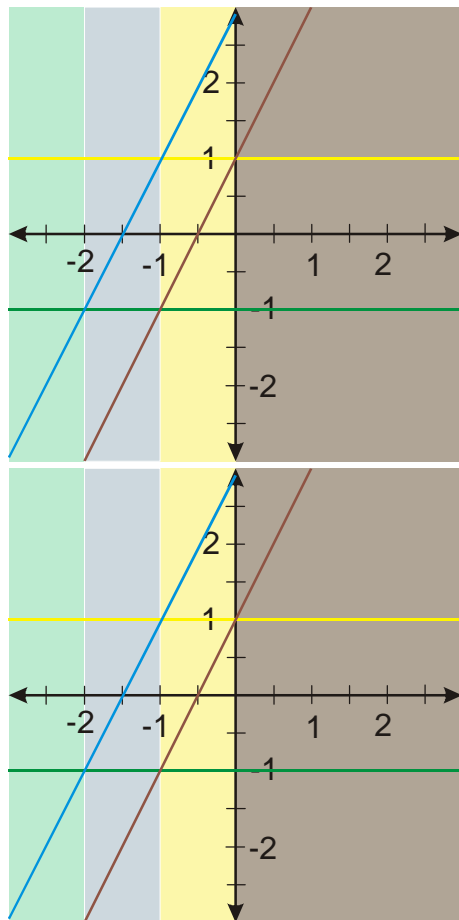
$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = |x| + x + 1 = -x + x + 1 = 1$$

**2)b)**  $x \in (0; \infty)$

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = |x| + x + 1 = x + x + 1 = 2x + 1$$



**Pedagogická poznámka:** Nikdo nepředpokládá, že předcházející příklad udělají všichni. Pokud se to povede alespoň někomu, bude to úspěch.

**Př. 8:** Petáková:  
strana 28/cvičení 40  $m_1, m_2$

**Shrnutí:** Postupným odstraňováním absolutních hodnot můžeme nakreslit i grafy funkcí s vloženými absolutními hodnotami (jen se to nesmí uspěchat).