2.4.5 Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru II

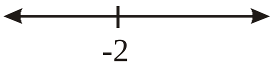
Předpoklady: 2404

Opakování: Pokud se v částech definičního oboru funkce chová různým způsobem rozdělíme si definiční obor na části a v každé z nich řešíme graf samostatně.
Pro absolutní hodnoty:
a) zjistíme, kdy se mění znaménko uvnitř a tím rozdělíme definiční obor na intervaly
b) v každém intervalu odstraníme všechny absolutní hodnoty a vypočteme výslednou funkci
c) pro každou funkci nakreslíme graf
d) každý z grafů vytáhneme v intervalu, pro který platí.

Pedagogická poznámka: Stejně jako v předchozí hodině se dá očekávat obrovský rozptyl v rychlosti postupu. Hlavně u příkladu 3 je však třeba dát pozor, aby rychlejší studenti neměli příklad špatně (kvůli odstraňování absolutní hodnoty).

Př. 1: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y=|x+2|+x-1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:
$|x+2|$: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$



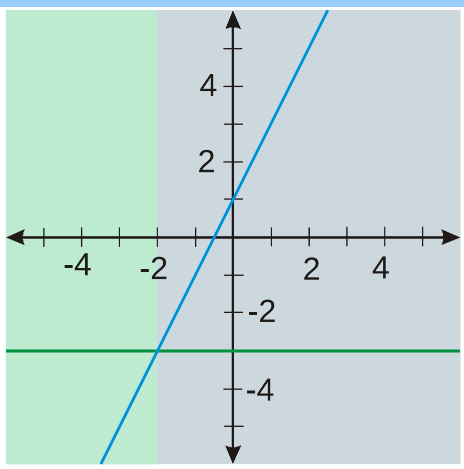
$\Rightarrow$ dva intervaly

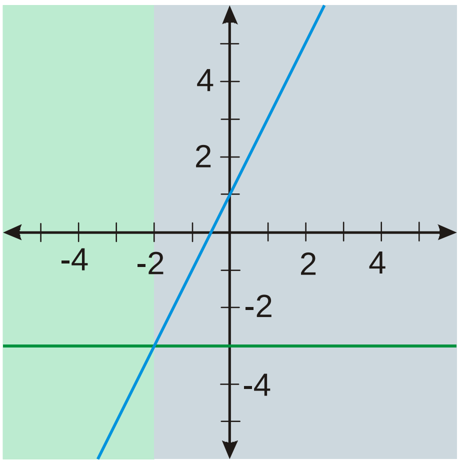
1) $x \in (-\infty;-2\rangle$ $\quad x+2<0 \Rightarrow |x+2|=-x-2$

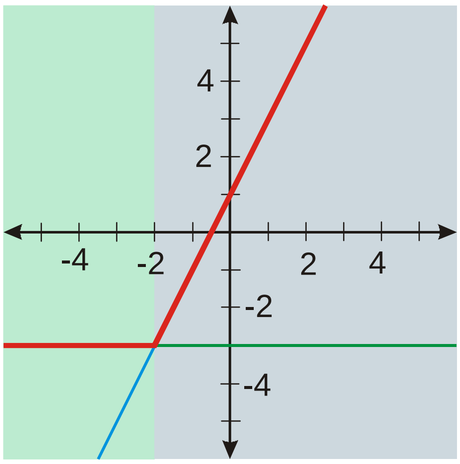
$y=|x+2|+x-1=-x-2+x-1=-3$

2) $x \in \langle -2;\infty)$ $\quad x+2<0 \Rightarrow |x+2|=-x-2$

$y=|x+2|+x-1=x+2+x-1=2x+1$







Př. 2: Nakresli graf funkce $y = |x+1| + |x| + 1$.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|x+1|$: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$|x|$: $x=0$

-1 0 $\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x \in (-\infty; -1)$ $x+1<0 \Rightarrow |x+1| = -x-1$ $x<0 \Rightarrow |x| = -x$

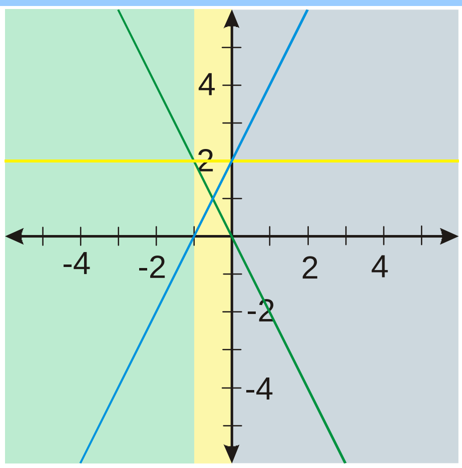
$y = |x+1| + |x| + 1 = -x-1-x+1 = -2x$

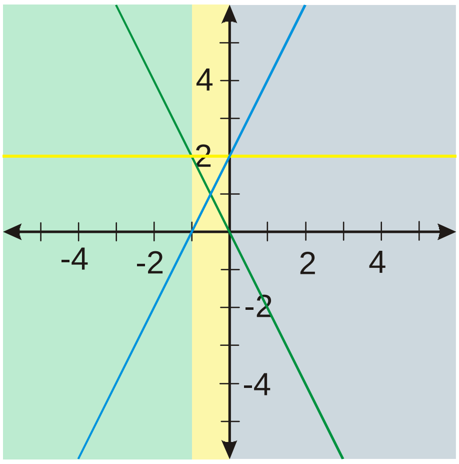
2) $x \in \langle -1; 0)$ $x+1>0 \Rightarrow |x+1| = x+1$ $x<0 \Rightarrow |x| = -x$

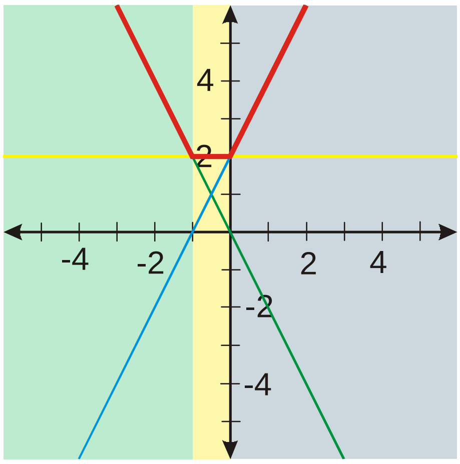
$y = |x+1| + |x| + 1 = x+1-x+1 = 2$

3) $x \in (0; \infty)$ $x+1>0 \Rightarrow |x+1| = x+1$ $x>0 \Rightarrow |x| = x$

$y = |x+1| + |x| + 1 = x+1+x+1 = 2x+2$







Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se pozná, kteří studenti mají opravdu jasno v důvodech, které vedou k zapisování intervalů, pro které platí vypočítané funkce. Pro ty, kteří dosud postupovali automaticky, bude potřeba příklad částečně vyřešit na tabuli. Já počítám předpis funkce v prvním intervalu, zbývající dva nechávám na studentech a kontrolujeme jej až později.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = |1-x| + |2+x| - x$.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|1-x|$: $1-x=0 \Rightarrow x=1$

$|2+x|$: $2+x=0 \Rightarrow x=-2$

-2 1 $\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x \in (-\infty;-2)$ $1-x>0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$ $2+x<0 \Rightarrow |2+x| = -2-x$

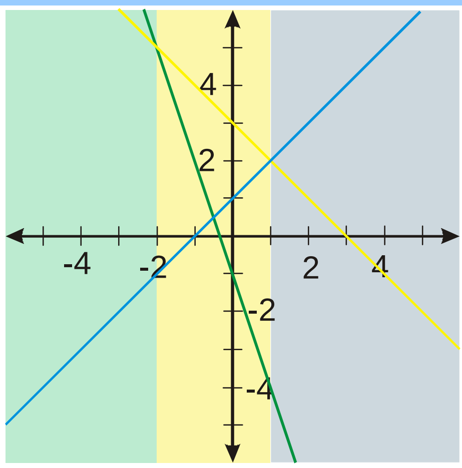
$y = |1-x| + |2+x| - x = 1-x-2-x-x = -1-3x$

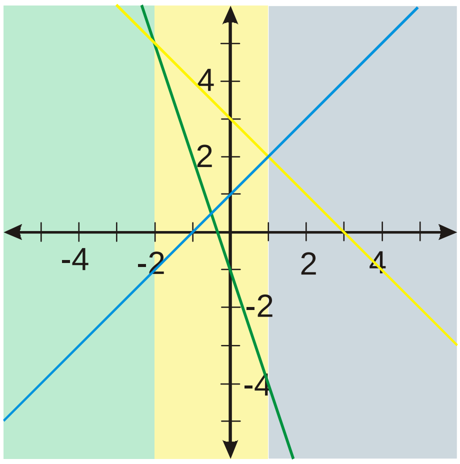
2) $x \in \langle -2;1 \rangle$ $1-x>0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$ $2+x>0 \Rightarrow |2+x| = 2+x$

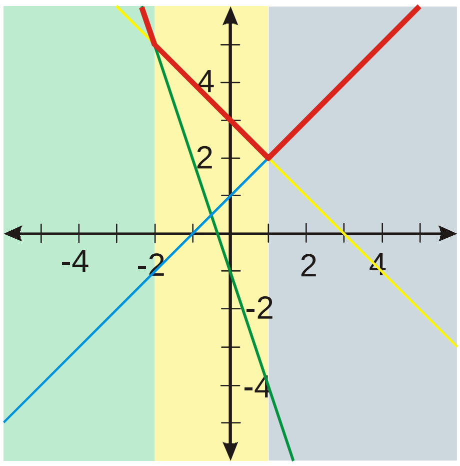
$y = |1-x| + |2+x| - x = 1-x+2+x-x = 3-x$

3) $x \in (1;\infty)$ $1-x<0 \Rightarrow |1-x| = -1+x$ $2+x>0 \Rightarrow |2+x| = 2+x$

$y = |1-x| + |2+x| - x = -1+x+2+x-x = 1+x$







Pedagogická poznámka: Studenti mají problémy s odstraňováním absolutní hodnoty $|1-x|$, je třeba dát pozor, aby rychlejší studenti neměli tuto chybu v sešitu příliš dlouho.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y=|2x-1|-|1-x|+x-1$.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|2x-1|$: $2x-1=0 \Rightarrow x=0,5$

$|1-x|$: $1-x=0 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x\in(-\infty;0,5)$ $2x-1<0 \Rightarrow |2x-1|=-2x+1$ $1-x>0 \Rightarrow |1-x|=1-x$

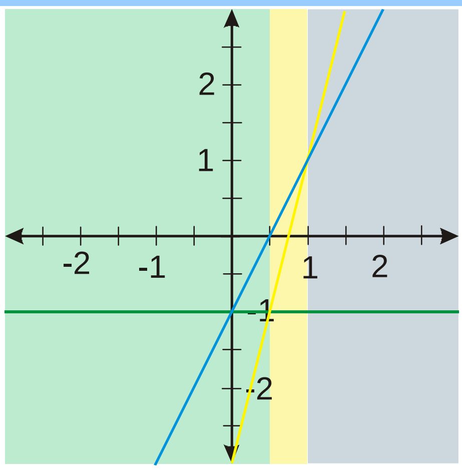
$y=|2x-1|-|1-x|+x-1=-2x+1-(1-x)+x-1=-1$

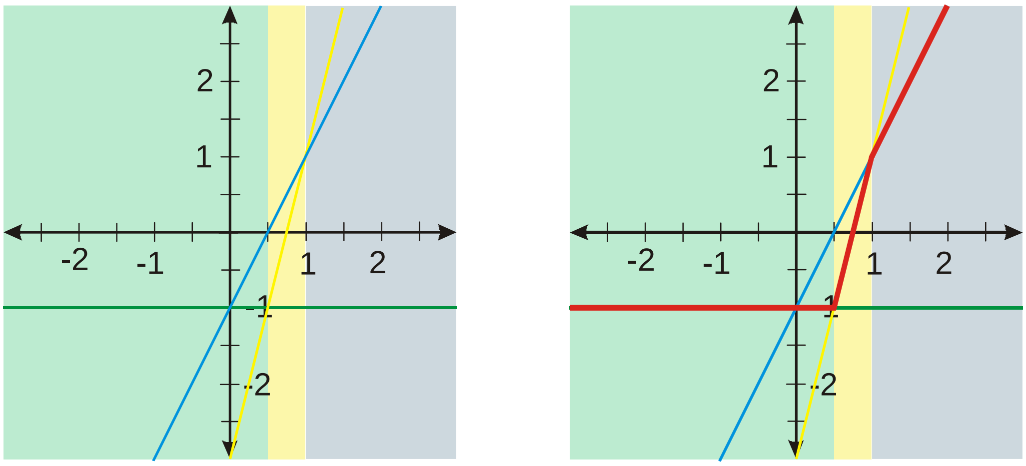
2) $x\in\langle 0,5;1\rangle$ $2x-1>0 \Rightarrow |2x-1|=2x-1$ $1-x>0 \Rightarrow |1-x|=1-x$

$y=|2x-1|-|1-x|+x-1=2x-1-(1-x)+x-1=4x-3$

3) $x\in(1;\infty)$ $2x-1>0 \Rightarrow |2x-1|=2x-1$ $1-x<0 \Rightarrow |1-x|=-1+x$

$y=|2x-1|-|1-x|+x-1=2x-1-(-1+x)+x-1=2x-1$





Př. 5: Na základě výsledků příkladů v této a předchozí rovině navrhni:
a) volbu bodů, ve kterých je nutné počítat funkční hodnoty při kreslení grafů částečných lineárních funkcí vzniklých v jednotlivých intervalech
b) nejrychlejší způsob řešení obtížnějších příkladů

Všechny zkonstruované grafy byly lomené nepřerušované čáry $\Rightarrow$
a) Pro kreslení jednotlivých lineárních funkcí je nejlepší volit hodnoty v nulových bodech, protože získané body náleží vždy dvěma částečným funkcím v intervalech, které v daném nulovém bodu sousedí.
b) Pro zakreslení jednotlivých částečných lineárních funkcí nám stačí hodnoty v nulových bodech, které ohraničují interval, pro který lineární funkci kreslíme $\Rightarrow$ nejrychleji můžeme postupovat takto:

- najdeme nulové body
- určíme hodnoty funkce v nulových bodech (a tedy i všechny částečné lineární funkce v omezených intervalech)
- určíme předpisy částečných lineárních funkcí v neomezených intervalech (nebo další dvě funkční hodnoty)
- dokreslíme graf funkce

Př. 6: Pomocí úspornější metody z předchozího úkolu nakresli graf funkce
$y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4$.

Procházíme jednotlivé nulové body a počítáme funkční hodnoty:

- $|x-4| \Rightarrow x = 4$
  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$
  $= |4-4| - |2\cdot 4-4| + |4+3| - |1-4| + 2|4| - 4 = 4$
  $\Rightarrow$ bod $[4;4]$
- $|2x-4| \Rightarrow x = 2$
  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$
  $= |2-4| - |2\cdot 2-4| + |2+3| - |1-2| + 2|2| - 4 = 6$
  $\Rightarrow$ bod $[2;6]$

- $|x+3| \Rightarrow x=-3$

  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$

  $= |(-3)-4| - |2\cdot(-3)-4| + |(-3)+3| - |1-(-3)| + 2|(-3)| - 4 = -5$

  $\Rightarrow$ bod $[-3;-5]$
- $|1-x| \Rightarrow x=1$

  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$

  $= |1-4| - |2\cdot 1-4| + |1+3| - |1-1| + 2|1| - 4 = 3$

  $\Rightarrow$ bod $[1;3]$
- $|x| \Rightarrow x=0$

  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$

  $= |0-4| - |0\cdot 1-4| + |0+3| - |1-0| + 2|0| - 4 = -2$

  $\Rightarrow$ bod $[0;-2]$

Dopočteme hodnotu pro x menší než nejmenší nulový bod a pro x větší než největší nulový bod:

- $x=6$

  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$

  $= |6-4| - |2\cdot 6-4| + |6+3| - |1-6| + 2|6| - 4 = 6$

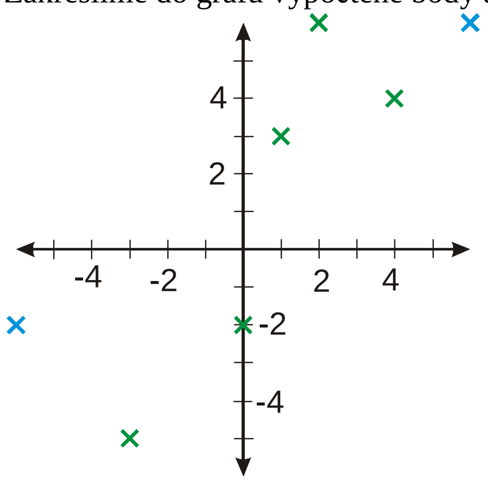
  $\Rightarrow$ bod $[6;6]$
- $x=-6$

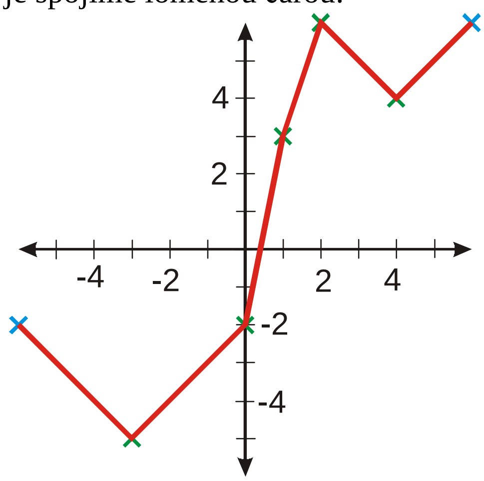
  $y = |x-4| - |2x-4| + |x+3| - |1-x| + 2|x| - 4 =$

  $= |(-6)-4| - |2\cdot(-6)-4| + |(-6)+3| - |1-(-6)| + 2|(-6)| - 4 = -2$

  $\Rightarrow$ bod $[-6;-2]$

Zakreslíme do grafu vypočtené body a poté je spojíme lomenou čarou:





Dodatek: Na první pohled se zdá, že jsme od začátku měli používat metodu z předchozího příkladu. Tato metoda má však dvě zásadní nevýhody:
Není z ní příliš dobře vidět na čem metoda stojí.
Není možné ji použít pro jiné druhy funkcí s absolutními hodnotami (tyto funkce nás čekají v dalších kapitolách).

Př. 7: (BONUS) Nakresli graf funkce $y = \left| |x+1| - 1 \right| + x + 1$.

Zjištění nulových bodů bude problém, pro vnější absolutní hodnotu nevíme, jaká čísla dodá vnitřní absolutní hodnota $\Rightarrow$ nejdříve odstraním vnitřní absolutní hodnotu:

$|x+1|$: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x \in (-\infty;-1)$

$x+1<0 \Rightarrow |x+1| = -x-1$

$y = \left| |x+1| - 1 \right| + x + 1 = |-x-1-1| + x + 1 = |-x-2| + x + 1$

teď odstraníme vnější absolutní hodnotu

$|-x-2|$: $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$

1)a) $x \in (-\infty;-2)$

$-x-2>0 \Rightarrow |-x-2| = -x-2$

$y = |-x-2| + x + 1 = -x-2+x+1 = -1$

1)b) $x \in \langle -2;-1)$

$-x-2<0 \Rightarrow |-x-2| = -(-x-2) = x+2$

$y = |-x-2| + x + 1 = x+2+x+1 = 2x+3$

2) vracíme se k vnitřní absolutní hodnotě

$x \in \langle -1;\infty)$

$x+1>0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$y = \left| |x+1| - 1 \right| + x + 1 = |x+1-1| + x + 1 = |x| + x + 1$

teď odstraníme vnější absolutní hodnotu

$|x|$: $x=0$

2)a) $x \in \langle -1;0)$

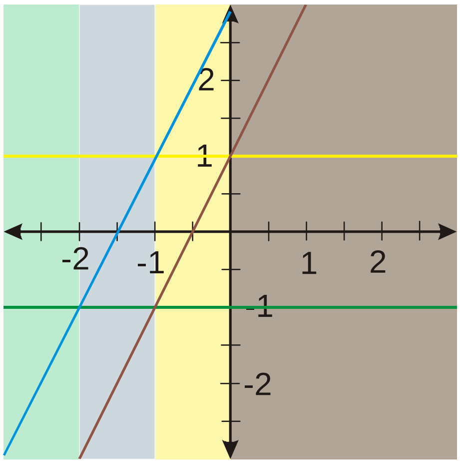
$x<0 \Rightarrow |x| = -x$

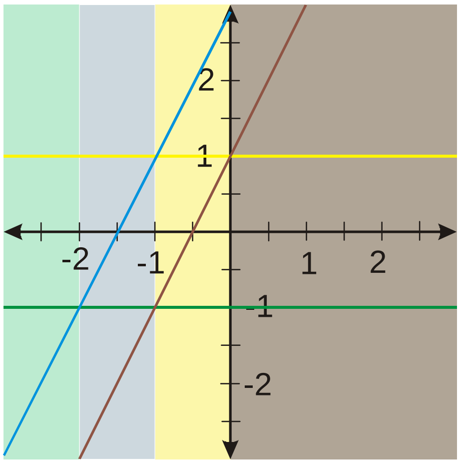
$y = |x| + x + 1 = -x+x+1 = 1$

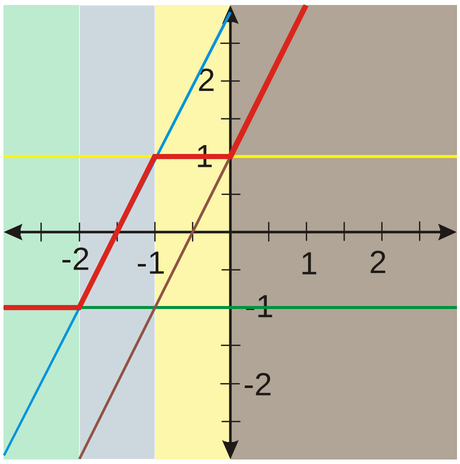
2)b) $x \in \langle 0;\infty)$

$x>0 \Rightarrow |x| = x$

$y = |x| + x + 1 = x+x+1 = 2x+1$







Pedagogická poznámka: Nikdo nepředpokládá, že předcházející příklad udělají všichni. Pokud se to povede alespoň někomu, bude to úspěch.

Př. 8: Petáková:
strana 28/cvičení 40 m_1, m_2

Shrnutí: Postupným odstraňováním absolutních hodnot můžeme nakreslit i grafy funkcí s vloženými absolutními hodnotami (jen se to nesmí uspěchat).