

## 2.4.3 Kreslení grafů funkcí metodou napodobení výpočtu II

**Předpoklady:** 2402

**Př. 1:** Nakresli graf funkce  $y = |-x + 1|$ .

Určení hodnoty pro  $x$  vypadá takto:

Vybereme  $x$ , například  $x = -2 \Rightarrow$

Uděláme  $-(-2) = 2 \Rightarrow$

Uděláme  $-(-2) + 1 = 3 \Rightarrow$

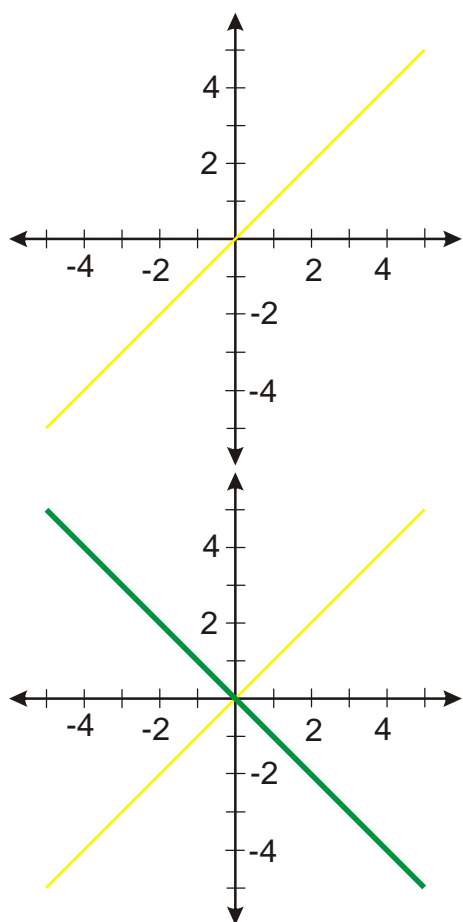
Dopočteme  $| -(-2) + 1 | = 3 \Rightarrow$

Nakreslíme funkci  $y = x$

Nakreslíme funkci  $y = -x$

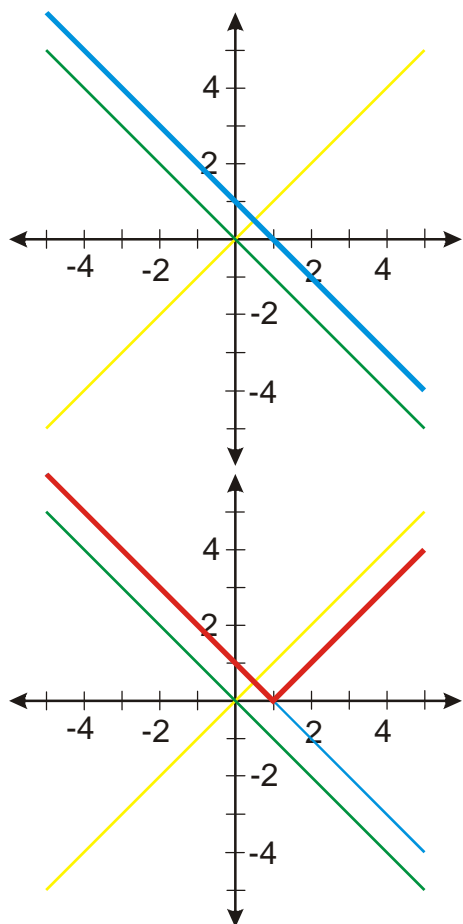
Nakreslíme funkci  $y = -x + 1$

Nakreslíme funkci  $y = |-x + 1|$



Graf funkce  $y = x$

Hodnoty předchozí funkce ( $y$ -ové souřadnice) násobíme  $-1$ , měníme znaménko  $\Rightarrow$  z kladných hodnot se stávají záporné, ze záporných kladné  $\Rightarrow$  body nad osou  $x$  převrátíme pod ní ( $[-2; -2] \Rightarrow [-2; 2]$ ), body pod osou  $x$  převrátíme nad ní



K hodnotám předchozí funkce ( $y$ -ové souřadnice) přičítáme jedničku  $\Rightarrow$  všechny hodnoty zvětšíme o jednu  
 $([-2; 2] \Rightarrow [-2; 3]) \Rightarrow$  graf se posune o jedničku nahoru

Z hodnot předchozí funkce ( $y$ -ové souřadnice) děláme absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  kladné hodnoty neměníme (body nad osou  $x$  zůstávají stejné), záporným hodnotám změníme znaménko na kladné (body pod osou  $x$  převrátíme nad ní)

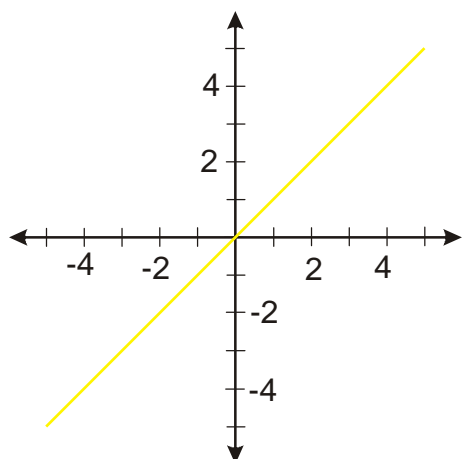
**Poznámka:** Graf předchozí funkce je stejný jako graf funkce  $y = |x-1|$  z minulé hodiny (kvůli rovnosti  $|x-1| = |-(x-1)| = |-x+1|$ ).

**Př. 2:** Nakresli graf funkce  $y = -|x-1| + 1$ .

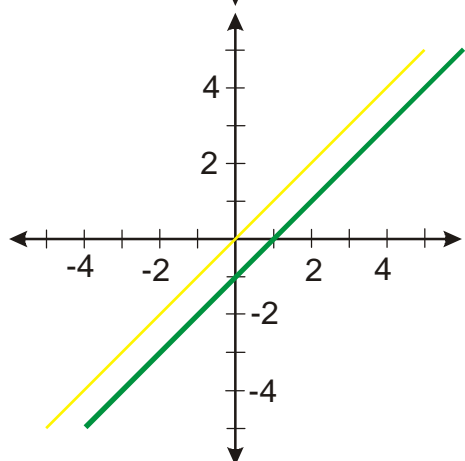
Určení hodnoty pro  $x$  vypadá takto:

- Vybereme  $x$ , například  $x = -2 \Rightarrow$
- Uděláme  $-2 - 1 = -3 \Rightarrow$
- Uděláme  $|-2 - 1| = 3 \Rightarrow$
- Uděláme  $-|-2 - 1| = -3 \Rightarrow$
- Dopočteme  $-|-2 - 1| + 1 = -2 \Rightarrow$

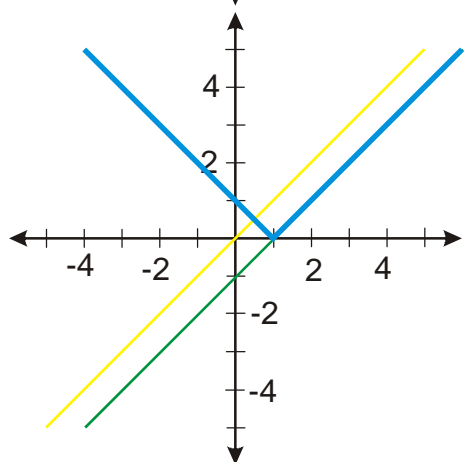
- Nakreslíme funkci  $y = x$
- Nakreslíme funkci  $y = x - 1$
- Nakreslíme funkci  $y = |x - 1|$
- Nakreslíme funkci  $y = -|x - 1|$
- Nakreslíme funkci  $y = -|x - 1| + 1$



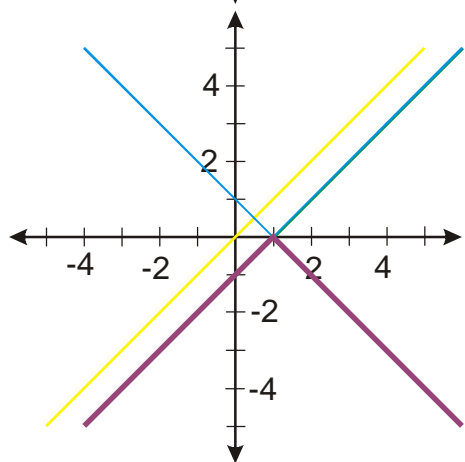
Graf funkce  $y = x$



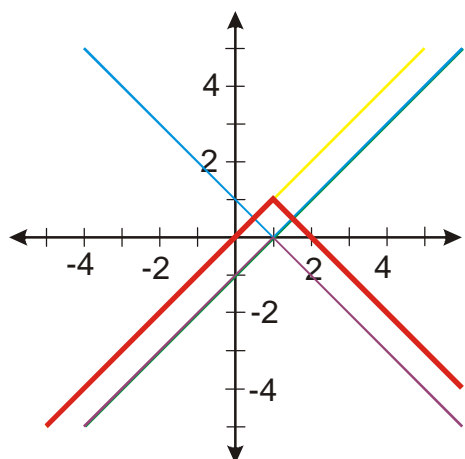
Od hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) odečítáme jedničku  $\Rightarrow$  všechny hodnoty zmenšíme o jedna ( $[-2; -2] \Rightarrow [-2; -3]$ )  $\Rightarrow$  graf se posune o jednu dolů



Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  kladné hodnoty neměníme (body nad osou  $x$  zůstávají stejné), záporným hodnotám změním znaménko na kladné (body pod osou  $x$  převrátíme nad ní  $[-2; -3] \Rightarrow [-2; 3]$ )



Hodnoty předchozí funkce (y-ové souřadnice) násobíme  $-1$ , měníme znaménko  $\Rightarrow$  z kladných hodnot se stávají záporné  $\Rightarrow$  body nad osou  $x$  převrátíme pod ní  $[-2; 3] \Rightarrow [-2; -3]$ )



K hodnotám předchozí funkce (y-ové souřadnice) přičítáme jedničku  $\Rightarrow$  všechny hodnoty zvětšíme o jednu  
 $([-2; -3] \Rightarrow [-2; -2]) \Rightarrow$  graf se posune o jedničku nahoru

**Pedagogická poznámka:** Studenti mají poměrně často problémy sestavit správnou posloupnost funkcí z funkce  $y = x - 1$  přecházejí rovnou na funkci  $y = -|x - 1|$ .

**Př. 3:** Nakresli graf funkce  $y = |2x - 2|$ .

Určení hodnoty pro  $x$  vypadá takto:

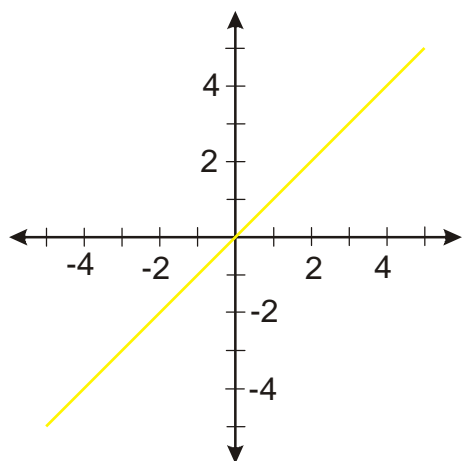
Vybereme  $x$ , například  $x = -2 \Rightarrow$   
 Uděláme  $2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow$   
 Uděláme  $2 \cdot (-2) - 2 = -6 \Rightarrow$   
 Dopočteme  $|2 \cdot (-2) - 2| = 6 \Rightarrow$

Nakreslíme funkci  $y = x$

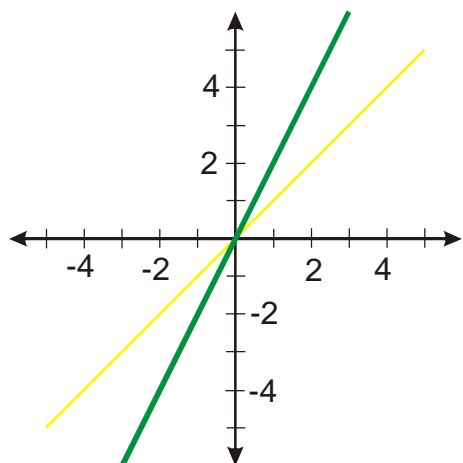
Nakreslíme funkci  $y = 2x$

Nakreslíme funkci  $y = 2x - 2$

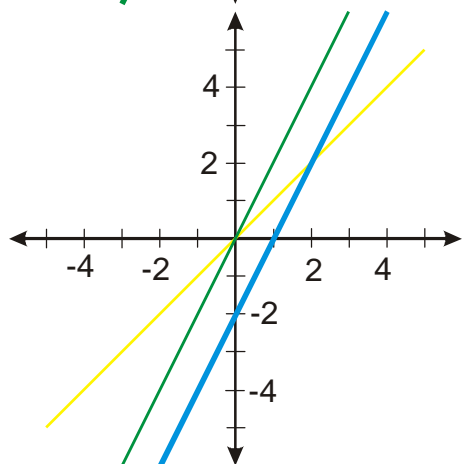
Nakreslíme funkci  $y = |2x - 2|$



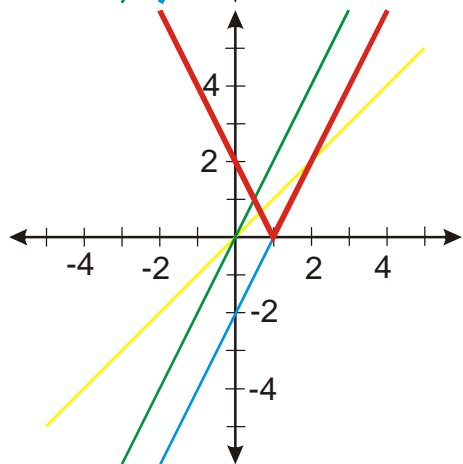
Graf funkce  $y = x$



Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme dvojnásobek  $\Rightarrow$  dojde například k těmto změnám  
 $[-2; -2] \Rightarrow [-2; -4]$ ,  $[-1; -1] \Rightarrow [-1; -2]$ ,  
 $[0; 0] \Rightarrow [0; 0]$ ,  $[1; 1] \Rightarrow [1; 2]$ ,  $[2; 2] \Rightarrow [2; 4]$ ,  
 graf funkce bude více strmý



Od hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) odečítáme dvojkou  $\Rightarrow$  všechny hodnoty zmenšíme o dvě  
 $([-2; -4] \Rightarrow [-2; -6]) \Rightarrow$  graf se posune o dvě dolů



Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  kladné hodnoty neměníme (body nad osou  $x$  zůstávají stejné), záporným hodnotám změním znaménko na kladné (body pod osou  $x$  převrátíme nad ní  $[-2; -6] \Rightarrow [-2; 6]$ )

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti mají tendenci začínat funkcí  $y = 2x$ . To je samozřejmě možné, ale já to v tomto okamžiku zakazuji, aby se na přechodu  $y = x \Rightarrow y = 2x$  naučili chápat, jak graf funkce mění násobení dvěma.

**Př. 4:** Nakresli graf funkce  $y = 2|x-2|$ .

Určení hodnoty pro  $x$  vypadá takto:

Vybereme  $x$ , například  $x = -2 \Rightarrow$

Uděláme  $-2 - 2 = -4 \Rightarrow$

Nakreslíme funkci  $y = x$

Nakreslíme funkci  $y = x - 2$

Uděláme  $|-2-2|=4$

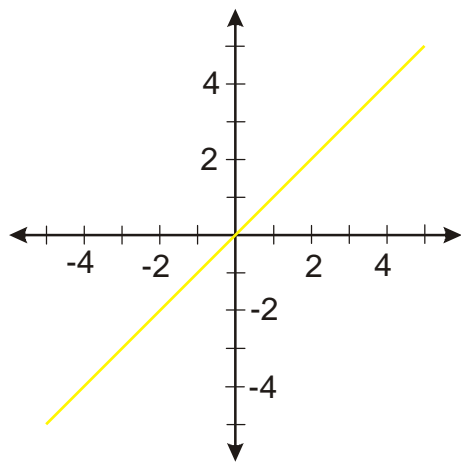
$\Rightarrow$

Nakreslíme funkci  $y=|x-2|$

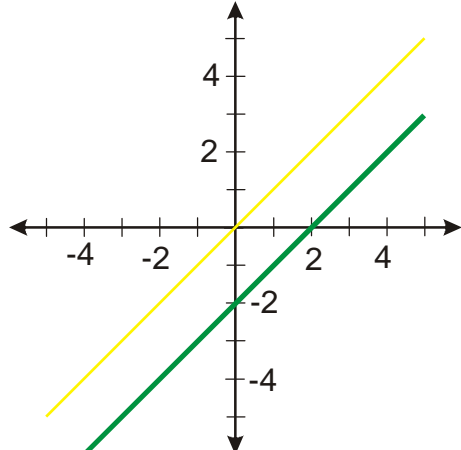
Dopočteme  $2|-2-2|=8$

$\Rightarrow$

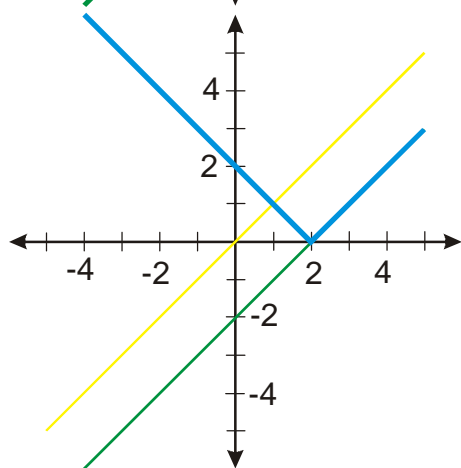
Nakreslíme funkci  $y=2|x-2|$



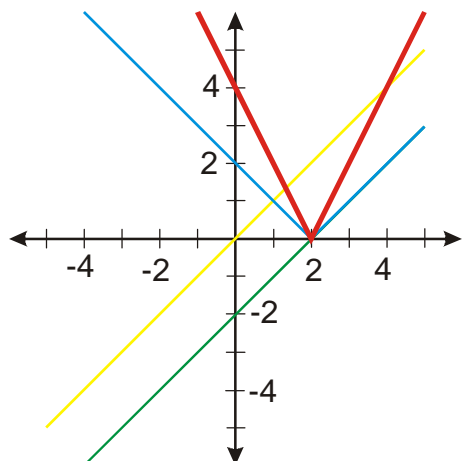
Graf funkce  $y = x$



Od hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) odečítáme dvojkou  $\Rightarrow$  všechny hodnoty zmenšíme o dvě ( $[-2; -2] \Rightarrow [-2; -4]$ )  $\Rightarrow$  graf se posune o dvě dolů



Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  kladné hodnoty neměníme (body nad osou  $x$  zůstávají stejné), záporným hodnotám změním znaménko na kladné (body pod osou  $x$  převrátíme nad ní  $[-2; -4] \Rightarrow [-2; 4]$ )



Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme dvojnásobek  $\Rightarrow$  dojde například k těmto změnám  
 $[-2; -2] \Rightarrow [-2; -4]$ ,  $[-1; -1] \Rightarrow [-1; -2]$ ,  
 $[0; 0] \Rightarrow [0; 0]$ ,  $[1; 1] \Rightarrow [1; 2]$ ,  $[2; 2] \Rightarrow [2; 4]$ ,  
 graf funkce bude více strmý

**Dodatek:** Protážení grafu funkce po vynásobení dvěma si můžeme ukázat na nafukovacím balónku. Vynásobení dvěma zvětší na dvojnásobek všechny svislé vzdálenosti na grafu, stejně tak jako bychom graf nakreslený na gumě balónku zdeformovali tím, že gumu balónku natáhneme ve svislém směru na dvojnásobek.

**Pedagogická poznámka:** Zásadní okamžik, kde se studenti setkávají s násobením dvěma (natahuje funkci ve svislém směru na dvojnásobek), pokud se jim podaří tento krok udělat samostatně nebudou mít problém ani s následujícím příkladem. U některých studentů jsem se setkal se zajímavou chybou, kdy se jim podaří zjistit, že napravo do bodu  $[2; 0]$  je graf strmější a proto, aby zachovali tvar grafu („věčko“), nakreslí graf nalevo od bodu  $[2; 0]$  (vlastně otočí „věčko“ okolo bodu  $[2; 0]$  o cca úhel  $30^\circ$ ).

**Př. 5:** Nakresli graf funkce  $y = \frac{1}{2}|x+2|$ .

Určení hodnoty pro  $x$  vypadá takto:

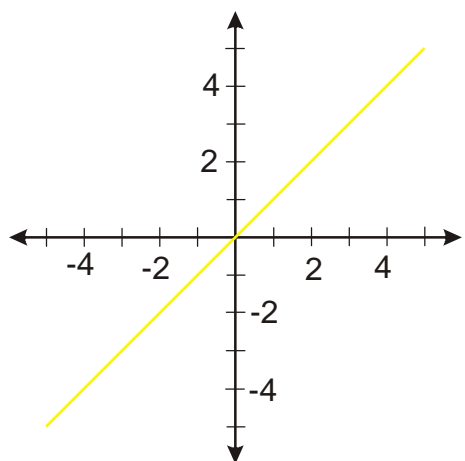
Vybereme  $x$ , například  $x = -4 \quad \Rightarrow$   
 Uděláme  $-4 + 2 = -2 \quad \Rightarrow$   
 Uděláme  $|-4 + 2| = 2 \quad \Rightarrow$   
 Dopočteme  $\frac{1}{2}|-4 + 2| = 1 \quad \Rightarrow$

Nakreslíme funkci  $y = x$

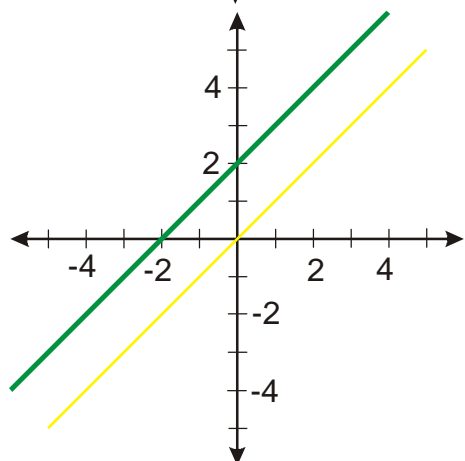
Nakreslíme funkci  $y = x + 2$

Nakreslíme funkci  $y = |x + 2|$

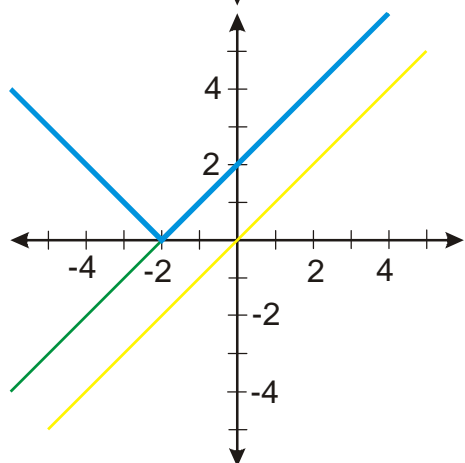
Nakreslíme funkci  $y = \frac{1}{2}|x - 2|$



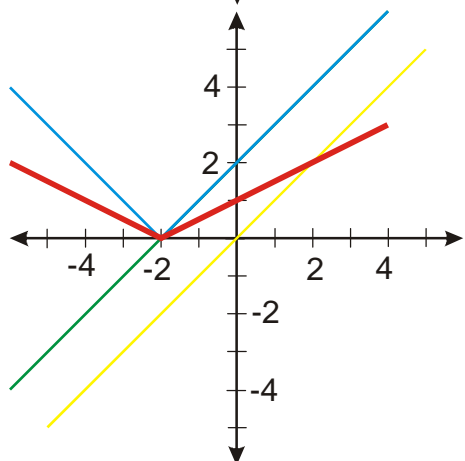
Graf funkce  $y = x$



K hodnotám předchozí funkce (y-ové souřadnice) přičítáme dvojku  $\Rightarrow$  všechny hodnoty zvětšíme o dvě  
 $([-4; -4] \Rightarrow [-2; -2]) \Rightarrow$  graf se posune o dvě nahoru



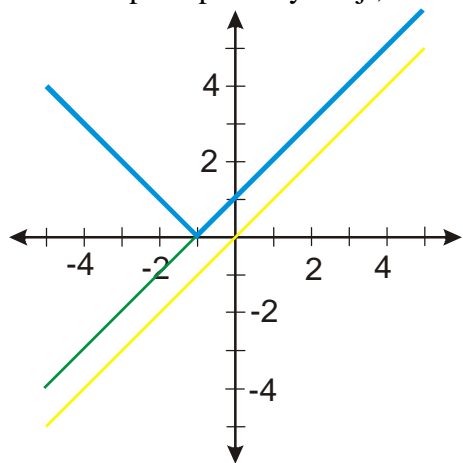
Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  kladné hodnoty neměníme (body nad osou  $x$  zůstávají stejné), záporným hodnotám změním znaménko na kladné (body pod osou  $x$  převrátíme nad ní  $[-4; -2] \Rightarrow [-4; 2]$ )



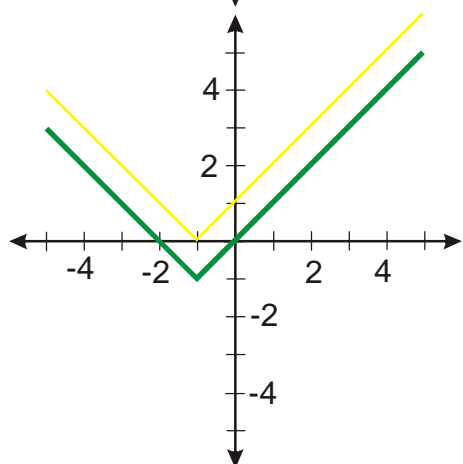
Z hodnot předchozí funkce (y-ové souřadnice) děláme polovinu  $\Rightarrow$  dojde například k těmto změnám  $[-4; 2] \Rightarrow [-4; 1]$ ,  
 $[-3; 1] \Rightarrow [-3; 0,5]$ ,  $[-2; 0] \Rightarrow [-2; 0]$ ,  
 $[-1; 1] \Rightarrow [-1; 0,5]$ ,  $[0; 2] \Rightarrow [0; 1]$  graf funkce bude méně strmý

**Př. 6:** Nakresli graf funkce  $y = ||x+1|-1|-1$ .

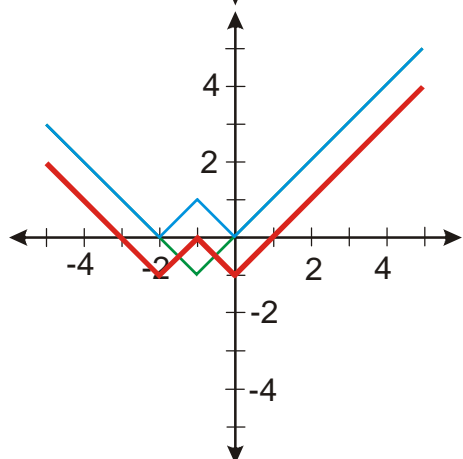
Teď budeme postupovat rychleji, nakreslíme do jednoho obrázku více grafů.



$y = x$
$y = x + 1$
$y =  x + 1 $



$y =  x + 1 $
$y =  x + 1  - 1$

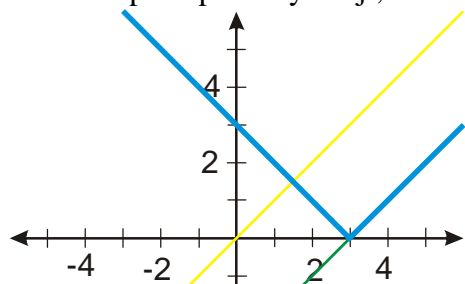


$y =  x + 1  - 1$
$y =   x + 1  - 1 $
$y =   x + 1  - 1  - 1$

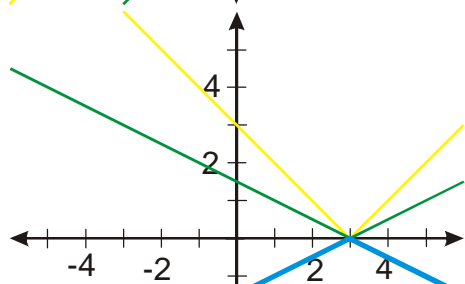
**Pedagogická poznámka:** Problémem je přechod od funkce  $y = |x+1|-1$  k funkci  $y = ||x+1|-1|$ , kde absolutní hodnota vytvoří další zalomení. Studenti se podvědomě snaží udržet tvar funkce podobný písmenu V.

**Př. 7:** Nakresli graf funkce  $y = \left| -\frac{1}{2}|x-2|+1 \right|$ .

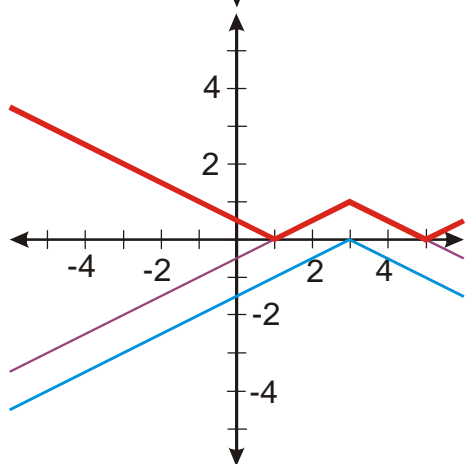
Teď budeme postupovat rychleji, nakreslíme do jednoho obrázku více grafů.



$y = x$
$y = x - 2$
$y =  x - 2 $



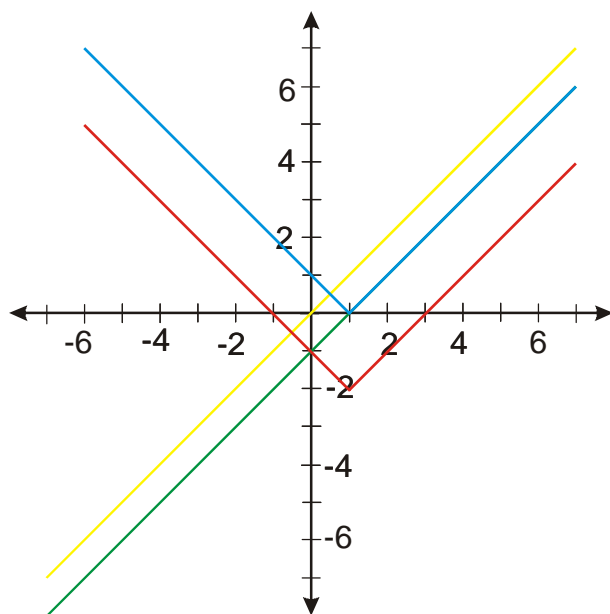
$y =  x - 2 $
$y = \frac{1}{2} x - 2 $
$y = -\frac{1}{2} x - 2 $



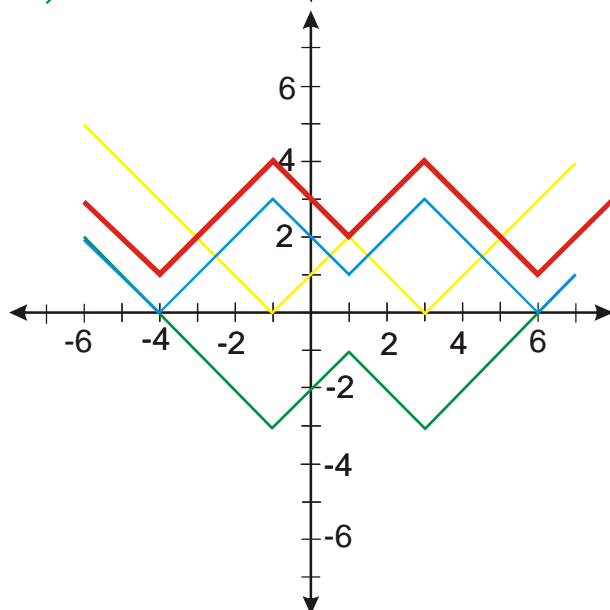
$y = -\frac{1}{2} x - 2 $
$y = -\frac{1}{2} x - 2  + 1$
$y = \left  -\frac{1}{2} x - 2  + 1 \right $

**Př. 8:** Nakresli graf funkce  $y = \left| \left| |x-1| - 2 \right| - 3 \right| + 1$ .

Teď budeme postupovat rychleji, nakreslíme do jednoho obrázku více grafů.



$y = x$
$y = x - 1$
$y =  x - 1 $
$y =  x - 1  - 2$



$y =   x - 1  - 2 $
$y =   x - 1  - 2  - 3$
$y =    x - 1  - 2  - 3 $
$y =    x - 1  - 2  - 3  + 1$

**Př. 9:** Petáková:  
strana 28/cvičení 40  $g_1, g_2, g_3, g_4$

**Shrnutí:** Když si dáme pozor, nakreslíme i úplné šílenosti.