

2.3.15 Soustavy více rovnic o více neznámých III

Předpoklady: 2314

Př. 1: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\x + z &= 4 \\y + z &= 5\end{aligned}$$

Soustavu budeme zapisovat tak, aby stejné proměnné byly pod sebou:

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\x + z &= 4 \\y + z &= 5\end{aligned}$$

likvidujeme x v 2. rovnici (ve třetí už není)

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\y - z &= 1 \\y + z &= 5\end{aligned}$$

[[1]] - [[2]]

likvidujeme z v 3. rovnici

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\y - z &= -1 \\2y &= 4\end{aligned}$$

[[2]] + [[3]]

Máme trojúhelníkový tvar:

$$y = 2$$

$$\text{dopočítáme } z: y - z = -1 \Rightarrow 2 - z = -1 \Rightarrow z = 3$$

$$\text{dopočítáme } x: x + y = 3 \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$K = \{[1; 2; 3]\}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu mají někdy studenti problémy s tím, že v počátečním tvaru soustavy už některé neznámé chybí. Jde o to, aby pochopili, že to není problém, ale naopak výhoda.

Při zápisu opět trvám na tom, aby zapisovali stejné neznámé pod sebe i za cenu toho, že v soustavě zůstanou „volná místa“.

Př. 2: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 1 \\a - b + 2c + d &= 3 \\2a + 2b + c + d &= 1 \\a - b - c - d &= 1\end{aligned}$$

Pořadí rovnic nebudeme měnit, první rovnice je nejjednodušší.

1. krok likvidace a

$$\begin{array}{rcl}
 & a+b-c+d & = 1 \\
 \text{[1]} - \text{[2]} & 2b-3c & = -2 \\
 2 \cdot \text{[1]} - \text{[3]} & -3c+d & = 1 \\
 \text{[1]} - \text{[4]} & 2b+2d & = 0
 \end{array}$$

Třetí rovnice už neobsahuje ani a , ani $b \Rightarrow$ při odstraňování b jí stačí opsat

2. krok likvidace b

$$\begin{array}{rcl}
 & a+b-c+d & = 1 \\
 & 2b-3c & = -2 \\
 & -3c+d & = 1 \\
 \text{[4]} - \text{[2]} & 3c+2d & = 2
 \end{array}$$

3. krok likvidace c

$$\begin{array}{rcl}
 & a+b-c+d & = 1 \\
 & 2b-3c & = -2 \\
 & -3c+d & = 1 \\
 \text{[4]} + \text{[3]} & 3d & = 3
 \end{array}$$

$$d = 1$$

Dopočítáme ostatní proměnné:

$$-3c+d=1 \Rightarrow -3c+1=1 \Rightarrow c=0$$

$$2b-3c=-2 \Rightarrow 2b-3 \cdot 0=-2 \Rightarrow b=-1$$

$$a+b-c+d=1 \Rightarrow a-1+0+1=1 \Rightarrow a=1$$

$$K = \{[1; -1; 0; 1]\}$$

Př. 3: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl}
 & a+b+c+d & = 8 \\
 & a-2b-c+2d & = 4 \\
 & 2a+b+c+3d & = 17 \\
 & 3a+2b-c+d & = 10
 \end{array}$$

Jednotlivé kroky při řešení zapisuj pod sebe na jednu stranu sešitu tak, aby v jeho druhé polovině bylo místo pro další podobný příklad.

Pořadí rovnic nebudeme měnit, první rovnice je nejjednodušší.

1. krok likvidace a

$$\begin{array}{rcl}
 & a+b+c+d & = 8 \\
 \text{[1]} - \text{[2]} & 3b+2c-d & = 4 \\
 2 \cdot \text{[1]} - \text{[3]} & b+c-d & = -1 \\
 3 \cdot \text{[1]} - \text{[4]} & b+4c+2d & = 14
 \end{array}$$

Druhou rovnicí budeme používat k přičítání v dalším kroku, proto je výhodné prohodit pořadí druhé a třetí rovnice, aby se na druhém místě objevila jednodušší rovnice.

$$\begin{array}{rcl}
 & a+b+c+d & = 8 \\
 & b+c-d & = -1 \\
 & 3b+2c-d & = 4 \\
 & b+4c+2d & = 14
 \end{array}$$

2. krok likvidace b

$$a+b+c+d=8$$

$$b+c-d=-1$$

$$3 \cdot [2] - [3] \quad c-2d=-7$$

$$[4] - [2] \quad 3c+3d=15 \quad /:3$$

$$a+b+c+d=8$$

$$b+c-d=-1$$

$$c-2d=-7$$

$$c+d=5$$

3. krok likvidace c

$$a+b+c+d=8$$

$$b+c-d=-1$$

$$c-2d=-7$$

$$[4] - [3] \quad 3d=12 \quad /:3$$

$$a+b+c+d=8$$

$$b+c-d=-1$$

$$c-2d=-7$$

$$d=4$$

Dopočítáme ostatní proměnné:

$$c-2d=-7 \Rightarrow c-2 \cdot 4=-7 \Rightarrow c=1$$

$$b+c-d=-1 \Rightarrow b+1-4=-1 \Rightarrow b=2$$

$$a+b+c+d=8 \Rightarrow a+2+1+4=8 \Rightarrow a=1$$

$$K = \{[1; 2; 1; 4]\}$$

Poznámka: Na první pohled vypadá Gaussova eliminační metoda těžkopádně a mnohdy se zdá, že by bylo možné „vynulovat“ koeficienty v řádcích rychleji. Zkusíme to na našem příkladu:

$$a+b+c+d=8$$

$$a-2b-c+2d=4$$

$$2a+b+c+3d=17$$

$$3a+2b-c+d=10$$

$$a+b+c+d=8$$

$$[2] - [1] \quad -3b-2c+d=-4$$

$$[3] - [1] \quad a \quad +2d=9$$

$$[4] - [1] \quad 2a+b-2c \quad =2$$

Hned v prvním kroku jsme vyrobili o jednu nulou více. Pokud bychom se však pokusili ve třetí rovnici získat jedinou proměnnou (zlikvidovat a nebo d) opět bychom si do rovnice zavlekli b a c , protože ostatní rovnice je stále obsahují.

Volnější postupy nejsou vyloučeny, ale zvláště ve složitějších příkladech vyžadují dobrou orientaci a odhad situace. Gaussova eliminační metoda je jistota, která po malém počtu kroků vede k řešení.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je poměrně extrémní. Utěšuju studenty, že horší už to nebude. V nejhorším případě mohou použít kalkulačku.

Př. 4: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic

$$\begin{aligned}3x - 4y + 5z &= 1 \\4x + 5y - 3z &= 1 \\5x - 4y + 4z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x - 4y + 5z &= 1 \\4x + 5y - 3z &= 1 \\5x - 4y + 4z &= 1\end{aligned}$$

likvidujeme x v 2. a 3. rovnici

$$\begin{aligned}3x - 4y + 5z &= 1 \\4\llbracket 1 \rrbracket - 3\llbracket 2 \rrbracket & \quad -31y + 29z = 1 \\5\llbracket 1 \rrbracket - 3\llbracket 2 \rrbracket & \quad -8y + 13z = 2\end{aligned}$$

Prohodíme druhou a třetí rovnici:

$$\begin{aligned}3x - 4y + 5z &= 1 \\-8y + 13z &= 2 \\-31y + 29z &= 1\end{aligned}$$

likvidujeme y ve třetí rovnici

$$\begin{aligned}3x - 4y + 5z &= 1 \\-8y + 13z &= 2 \\31\llbracket 2 \rrbracket - 8\llbracket 3 \rrbracket & \quad 171z = 54\end{aligned}$$

$$z = \frac{54}{171} = \frac{6}{19}$$

$$\text{Dopočítáme } y: 8y = 13z - 2 = 13 \cdot \frac{6}{19} - 2 = \frac{40}{19} \Rightarrow y = \frac{5}{19}$$

$$\text{Dopočítáme } x: 3x = 1 - 5z + 4y = 1 - 5 \cdot \frac{6}{19} + 4 \cdot \frac{5}{19} = \frac{9}{19} \Rightarrow x = \frac{3}{19}$$

$$K = \left\{ \left[\frac{3}{19}; \frac{5}{19}; \frac{6}{19} \right] \right\}$$

Pedagogická poznámka: Pokud předcházející příklady někomu na zaplnění hodiny nestačí, má k dispozici sbírku.

Př. 5: Petáková:
strana 16/cvičení 31 c) e) f)

Shrnutí: Soustavu rovnic můžeme převést do trojúhelníkového tvaru postupnou likvidací proměnných sčítáním vhodných násobků rovnic mezi sebou.