2.3.12 Soustavy tří lineárních rovnic o dvou neznámých

Předpoklady: 2311

Pedagogická poznámka: Následující příklady samozřejmě nemohou stačit na celou hodinu. My jsme je probrali během půlhodiny před písemkou. Neexistuje speciální skupina příkladů na soustavy tří lineárních rovnic o dvou neznámých, pouze se mi osvědčilo použít dva následující příklady na postupný přechod od soustav dvou rovnic k soustavám složitějším. Záměrem je, aby studenti ozkoušeli interpretovat dosud nový typ výsledků (bylo pro ně překvapivě těžké zjistit, že první soustava nemá řešení) a okusili přehlednost zápisu celé soustavy při sčítací metodě, která je při větším počtu rovnic asi nezbytná.

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x-3y&=6 \\ x+2y&=1 \\ 3x+y&=-7 \end{aligned}$ dosazovací metodou.

Z první rovnice vyjádříme x a dosadíme do zbývajících

$x-3y=6 \Rightarrow x=6+3y$

druhá rovnice:

$(6+3y)+2y=1$

$5y=-5$

$y=-1$

třetí rovnice:

$3(6+3y)+y=-7$

$18+9y+y=-7$

$10y=-25$

$y=-2,5$

$\Rightarrow$ z druhé a třetí rovnice vyšly různé hodnoty pro y $\Rightarrow$ neexistuje takové číslo, které bychom mohli za y do těchto rovnic dosadit $\Rightarrow$ soustava nemá řešení

$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Studentů, kteří zjistí, že vyjdou dvě různé hodnoty *y* (některým dokonce i víc, protože začnou dopočítávat pomocí *y* hodnoty *x*), je podstatně více než těch, kteří poznají, že soustava nemůže mít v takovém případě řešení. Jde zřejmě o důsledek nechuti studentů pamatovat si obecné principy.
Opět si tedy připomínáme, že když si uvědomíme, že řešení rovnice je hledáním čísel, které můžeme dosadit za neznámé, aby všechny rovnice vyšly, plyne ze dvou různých výsledků při výpočtu neznámé *y* neřešitelnost soustavy. Pokud vyhovíme jedné z těchto rovnic nebude splněna druhá a obráceně. Všechny tři rovnice pak nesplníme nikdy.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x-3y&=6 \\ x+2y&=1 \\ 3x+y&=-7 \end{aligned}$ sčítací metodou.

$$\begin{aligned} x-3y&=6 \\ x+2y&=1 \\ 3x+y&=-7 \\ \hline \end{aligned}$$

$x-3y=6$

$5y=-5 \qquad [\![2]\!]-[\![1]\!] \qquad$ 2.rce-1.rce

$10y=-25 \qquad [\![3]\!]-3\cdot[\![1]\!] \qquad 3.\text{rce}-3\cdot(1.\text{rce})$

$x-3y=6$

$5y=-5 \quad /:5$

$10y=-25 \quad /:10$

$x-3y=6$

$y=-1$

$y=-2,5$

Soustava rovnic nemá řešení, druhá a třetí rovnice se navzájem vylučují.
$K=\emptyset$

Poznámka: Při zápisu budeme dále využívat popis při první úpravě této soustavy. Poznámka $[\![2]\!]-[\![1]\!]$ napravo od druhé rovnice znamená, že tato rovnice vznikla odečtením první rovnice předchozího tvaru soustavy od druhé rovnice. Zápis $[\![3]\!]-3\cdot[\![1]\!]$ znamená, že rovnice vznikla odečtením trojnásobku první rovnice předchozího tvaru soustavy od rovnice třetí. Dále v textu budeme tyto poznámky uvádět nalevo od rovnic, aby se vpravo mohly psát případné úpravy jednotlivých rovnic jako dosud.

Poznámka: Z porovnání dvou předchozích příkladů vyplývá největší přednost sčítací metody s neustálým přepisováním kompletní sady rovnic – přehlednost. Z posledního zápisu je jasně vidět, že druhá a třetí rovnice se vylučují a soustava nemůže mít řešení.

Musíme si ještě ujasnit princip nahrazování rovnic v soustavě.
Rovnice, která vznikne sečtením dvou (nebo více) může v soustavě nahradit pouze jednu rovnic, ze kterých vznikla.
Je to samozřejmé. Když vznikla sečtením některých rovnic, obsahuje v sobě jejich podmínky (a taky by šlo původní rovnice z ní zpětně vypočítat). Pokud bychom takovou rovnicí nahradili jinou rovnici v soustavě, která se na jejím vzniku nepodílela, informace ukrytá v nahrazené rovnici by zmizela.

Př. 3: Najdi chybu v řešení předchozího příkladu:

$x-3y=6$

$x+2y=1$

$3x+y=-7$

Sečteme všechny rovnice: $5x=0 \Rightarrow x=0$
Teď dosadíme, do první rovnice a dopočteme *y*:

$x-3y=6 \Rightarrow 0-3y=6$

$y=-2$

$K=[0;-2]$

Předchozí výpočet neznamená, že soustava má řešení. Použili pouze dvě rovnice: první (do té jsme dosazovali hodnotu *x*) a druhou nebo třetí (nahrazeny součtem všech rovnic). Musíme použít i třetí rovnici ze sady (buď druhou nebo třetí) a s její pomocí výslednou dvojici čísel zkontrolovat například dosazením:

Z druhé rovnice: $x+2y=1 \Rightarrow 0+2\cdot(-2)=-4\neq 1$

Ze třetí rovnice: $3x+y=-7 \Rightarrow 3\cdot 0+(-2)=-2\neq -7$

Je vidět, že ani jedna z rovnic nevyšla a soustava tedy nemá řešení.

$K=\emptyset$

Dosazení do první rovnice samozřejmě vyjde, neboť jsme z ní počítali hodnotu y tak, aby tato rovnice vyšla.

$x-3y=6 \Rightarrow 0-3(-2)=6$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} s+2t&=1\\ 2s-t&=-3\\ 8s+6t&=-2\end{aligned}$ sčítací metodou. Udržuj přehledný zápis a opisuj kompletní sadu rovnic.

$$\begin{aligned} s+2t&=1\\ 2s-t&=-3\\ 8s+6t&=-2\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrl} & s+2t=1 & \\ [\![2]\!]-2\cdot[\![1]\!] & -5t=-5 & /:(-5) \\ [\![3]\!]-8\cdot[\![1]\!] & -10t=-10 & /:(-10) \end{array}$$

$$\begin{aligned} s+2t&=1\\ t&=1\\ t&=1\end{aligned}$$

Druhá a třetí rovnice jsou stejné. Získanou hodnotu mohu dosadit do první rovnice a určit zbývající neznámou:

$s+2t=1 \Rightarrow s+2\cdot 1=1$

$s=-1$

$K=[-1;1]$

Z počtu proměnných a počtu rovnic není možné předem usuzovat, zda má soustava řešení a kolik jich existuje. Nejpřehlednější metodou jak dospět k výsledku je pomocí sčítací metody upravovat jednotlivé rovnice (a neustále opisovat plnou sadu rovnic) až do okamžiku, kdy můžeme jednoznačně rozhodnout, které rovnice jsou shodné, případně, které si odporují.

Shrnutí: Při řešení soustav rovnic je nutné si držet přehled o počtu rovnic.