

## 2.3.9 Lineární nerovnice se dvěma neznámými

**Předpoklady:** 2308

**Př. 1:** Najdi všechna řešení nerovnice  $6x + 3y + 1 \leq 10$ .

Zkusíme jako u rovnice.

$$6x + 3y + 1 \leq 10$$

$$3y \leq 9 - 6x$$

$$y \leq \frac{9 - 6x}{3} = 3 - 2x$$

Jak zapsat množinu všech řešení?

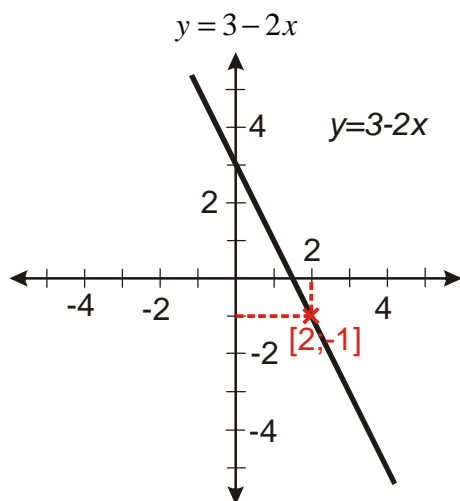
Jde napsat  $K = \{[x; 3 - 2x]; x \in R\}$ ?  $\Rightarrow$  Nejde, je to zapsání výsledků rovnice  $6x + 3y + 1 = 10$ .

**Správně:**  $K = \{[x; y]; x \in R; y \leq 3 - 2x\}$

$\Rightarrow$  Moc nového jsme se z takového zápisu nedozvěděli.

Co graficky?

Rovnice  $6x + 3y + 1 = 10$   
 $K = \{[x; 3 - 2x]; x \in R\}$   
Grafické znázornění – lineární funkce.



Proč tam patří bod  $[2; -1]$ ?

Platí pro něj  $x = 2$ ,  $y = -1$ . Tato uspořádaná dvojice vyhovuje rovnici  $6x + 3y + 1 = 10$  (protože platí  $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot 2 = -1$ ).

Nerovnice  $6x + 3y + 1 \leq 10$

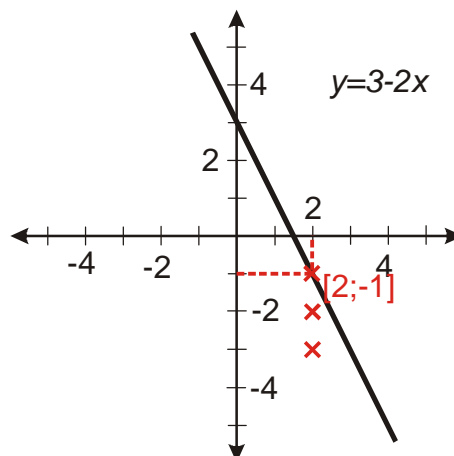
$$K = \{[x; y]; x \in R; y \leq 3 - 2x\}$$

Částí grafického znázornění je přímka v levém sloupci.

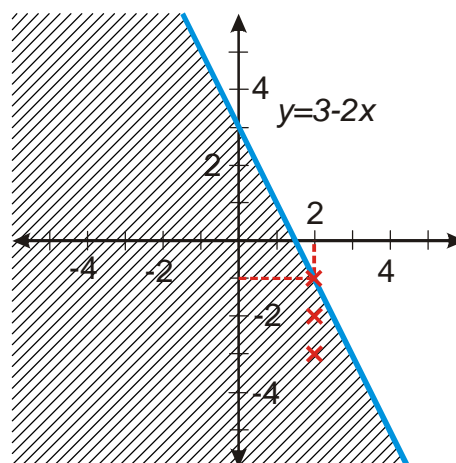
Další body z řešení pro které  $x = 2$ :

$[2; -2]$  nebo  $[2; -3]$ , protože

$$-2 \leq 3 - 2x = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$



K řešení patří všechny body ležící pod bodem  $[2; -1]$  (všechny mají  $y < 3 - 2x$ )  $\Rightarrow$  grafickým znázorněním nerovnice je spodní polorovina s hraniční přímkou  $y = 3 - 2x$  (spodní protože, nižší poloha znamená menší  $y$ ).



**Grafickým znázorněním řešení nerovnice  $y \leq 3 - 2x$  je polorovina s hraniční přímkou  $y = 3 - 2x$ .**

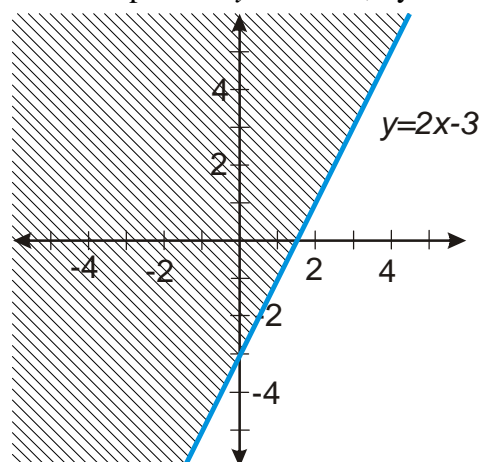
**Pedagogická poznámka:** Většina studentů se brání tomu, aby napsala množinu řešení předchozí nerovnice. Snažím se je k tomu donutit a pokud napíší řešení pro rovnice, chci, aby našli chybu, kterou udělali. Někteří z nich napíší „správné“ řešení ve tvaru  $K = \left\{ \left[ x; (-\infty; 3 - 2x) \right], x \in \mathbb{R} \right\}$ . Nejde o správné řešení v matematickém smyslu slova (v zápisu je uspořádaná dvojice čísla a intervalu), ale je správné v tom, že jeho autor pochopil, že k jedné hodnotě  $x$  existuje daleko víc hodnot  $y$ . U grafického řešení je třeba tak třetině studentů pomoci. Další příklady pak studenti dělají poměrně rychle a sami. Poslední nejasnosti ohledně šrafování se objevují hned u následujícího příkladu, dál už tyto problémy nejsou.

**Př. 2:** Graficky znázorni množinu všech řešení nerovnice  $2x - 2 \leq y + 1$ .

$$2x - 2 \leq y + 1$$

$$2x - 3 \leq y$$

Hraniční přímka  $y = 2x - 3$ , vybíráme horní polorovinu (větší  $y \Rightarrow$  výše postavené body).

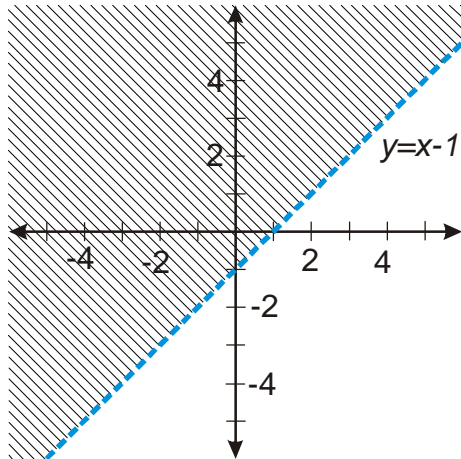


**Př. 3:** Graficky znázorni množinu všech řešení nerovnice  $2x + y > 3x - 1$ .

$$2x + y > 3x - 1$$

$$y > x - 1$$

Hraniční přímka  $y = x - 1$ , vybíráme horní polorovinu (větší  $y \Rightarrow$  výše postavené body),  
**nerovnost neobsahuje „=“  $\Rightarrow$  grafické znázornění neobsahuje hraniční přímku  $\Rightarrow$  je zobrazená čárkovaně** (tento postup se používá v matematice obecně. Čáry, které nenáleží do řešení se kreslí čárkovaně).

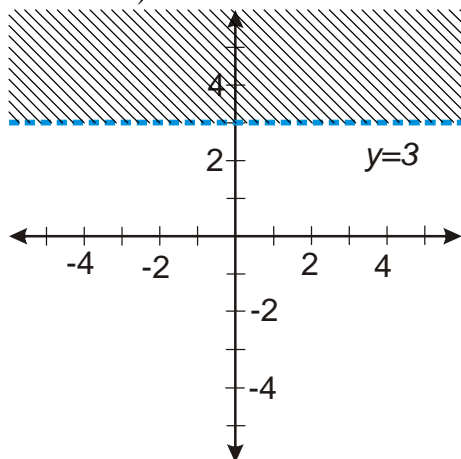


**Př. 4:** Graficky znázorni množinu všech řešení nerovnice  $2x + y > 2x + 3$ .

$$2x + y > 2x + 3$$

$$y > 3$$

Hraniční přímka  $y = 3$ , vybíráme horní polorovinu (větší  $y \Rightarrow$  výše postavené body),  
nerovnost neobsahuje „=“  $\Rightarrow$  grafické znázornění neobsahuje hraniční přímku (je zobrazená čárkovaně).



**Poznámka:** Řešitelné z paměti. Podmínku  $y > 3$ , splňují všechny body s  $y$ -ovou souřadnicí větší než 3, tedy všechny body nad přímkou  $y = 3$ .

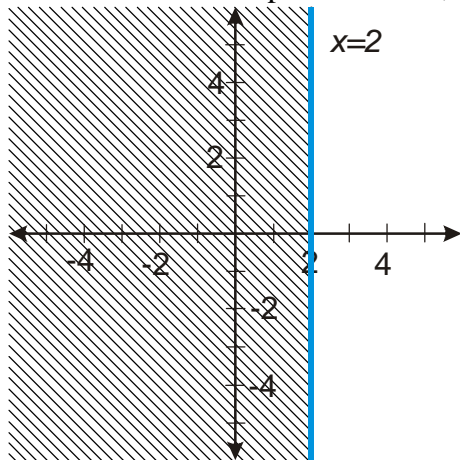
**Př. 5:** Graficky znázorni množinu všech řešení nerovnice  $2x + 2y \leq 2y + 4$ .

$$2x + 2y \leq 2y + 4$$

$0y \leq 4 - 2x \Rightarrow$  Tato nerovnice nepůjde upravit tak, abychom získali předpis funkce  $\Rightarrow$  upravíme ji do co nejjednoduššího tvaru.

$$2x \leq 4$$

$x \leq 2 \Rightarrow$  Hraniční přímka  $x = 2$ , vybíráme levou polovinu (menší  $x \Rightarrow$  body více vlevo).



**Poznámka:** Řešitelné z paměti. Podmínku  $x \leq 2$ , splňují všechny body s  $x$ -ovou souřadnicí menší nebo rovnou 2, tedy všechny body vlevo od přímky  $x = 2$  a tato přímka

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad působí problémy spíše lepším studentům, kteří automaticky předpokládají, že předpis funkce je nutným mezistupněm při řešení příkladů. Rada je stejná jako v řešení příkladu, pokud se nedaří vytvořit předpis funkce je nutné upravit nerovnici do co nejjednoduššího tvaru.

**Př. 6:** Graficky znázorni množinu všech řešení soustavy nerovnic 
$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \geq 2 \end{cases}$$

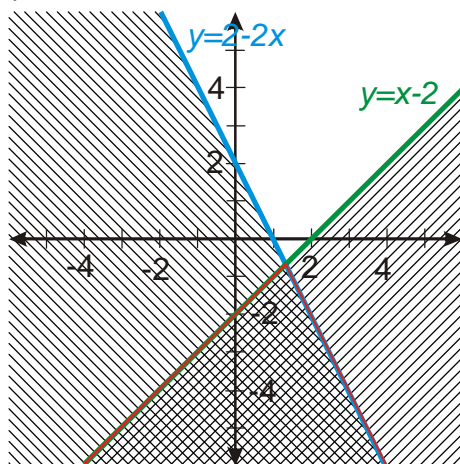
Dvě nerovnice: dvě podmínky, které omezují volbu čísel do proměnných  $\Rightarrow$  nakreslíme řešení pro každou nerovnici zvlášť a vybereme ty, které splňují obojí.

$$2x + y \leq 2$$

$$x - y \geq 2$$

$$y \leq 2 - 2x$$

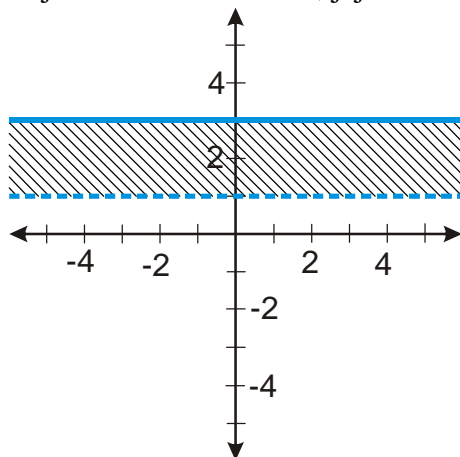
$$x - 2 \geq y$$



Řešením soustavy jsou body splňující obě podmínky, tedy body ve dvojitě šrafované oblasti.

**Pedagogická poznámka:** Snažím se neposkytovat žádnou jinou radu než, jde o dvě podmínky.

**Př. 7:** Najdi soustavu nerovnic, jejichž řešení je vyznačeno na obrázku.



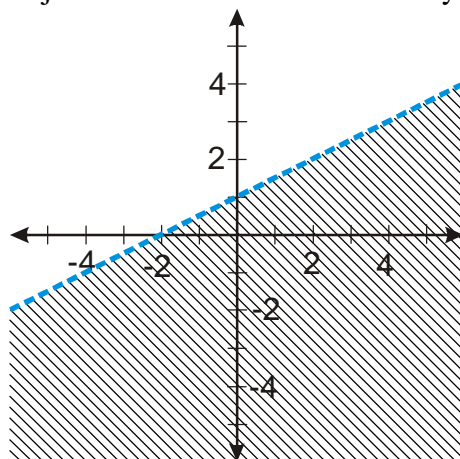
Vyšrafovaná oblast je průnik:

- Všech bodů na a pod plnou čarou – body splňují nerovnici  $y \leq 3$ .
- Všech bodů nad čárkovanou čarou – body splňují nerovnici  $y > 1$ .

Na obrázku je graficky znázorněno řešení soustavy nerovnic  $y \leq 3$   
 $y > 1$ .

**Pedagogická poznámka:** Kromě přehlednutí u znamének nerovností jsem se nasetkal s žádným problémem.

**Př. 8:** Najdi nerovnici se dvěma neznámými jejíž množina řešení je nakreslena na obrázku.



Nejdříve musíme určit předpis lineární funkce, která tvoří hraniční přímku.

- Prochází bodem  $[0;1] \Rightarrow$  předpis  $y = ax + 1$ .
- Prochází bodem  $[2;2]$ , dosadíme do předchozí rovnice.

$$y = ax + 1$$

$$2 = a \cdot 2 + 1$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Hraniční přímkou tvoří funkce  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

Vyšrafovány jsou body pod přímkou  $\Rightarrow$  jde o řešení nerovnice  $y < \frac{1}{2}x + 1$ .

Jiný zápis například  $2y < x + 2$  nebo  $x - 2y + 2 > 0$  atd. .

**Pedagogická poznámka:** Nejhorší je samozřejmě určení předpisu funkce. Zase otázka paměti.

**Př. 9:** Petáková:  
strana 18/cvičení 40 a) b) c)

**Shrnutí:**