

2.3.6 Nerovnice v podílovém tvaru II

Předpoklady: 2303, 2304

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{(3x-1)(x^2+1)}{(x+1)(2-x)(1-3x)} \leq 0$.

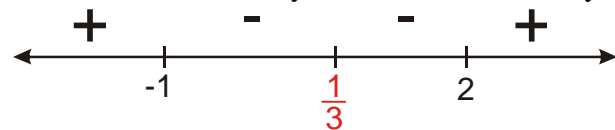
Podmínky: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, $2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, $1-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$

Člen (x^2+1) je vždy kladný \Rightarrow nebudeme se s ním dále zabývat, znaménko neovlivňuje.

Přepíšeme si nerovnici do součinnového tvaru a vyznačíme si druhy funkcí a znaménko

v prvním intervalu: $\begin{array}{cccc} - & - & + & + \\ \nearrow & \nearrow & \searrow & \searrow \end{array}$
 $(3x-1) \frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{1}{(2-x)} \cdot \frac{1}{(1-3x)} \leq 0$

Nulové body a znaménka celého výrazu. Bod $\frac{1}{3}$ si nakreslíme červeně, protože v něm mění znaménko dvě závorky a znaménko celého výrazu se v něm tedy nezmění:



$$K = \left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x^2+3}{1-3x} < 0$.

Podmínka: $1-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$

Čitatel zlomku je vždy kladný \Rightarrow neovlivňuje znaménko \Rightarrow řešíme vlastně nerovnici $1-3x < 0$

$$1 < 3x$$

$$x > \frac{1}{3}$$

$$K = \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

Pedagogická poznámka: Připomínám studentům, že tabulka je na tento příklad trochu zbytečně velký kanón.

Př. 3: Vyřeš nerovnici: $\frac{9}{x+2} \geq 3$.

Problém: Na pravé straně není nula \Rightarrow převedeme 3 na levou stranu a vyrobíme jediný zlomek.

$$\frac{9}{x+2} \geq 3$$

$$\frac{9}{x+2} - 3 \geq 0$$

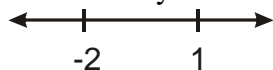
$$\frac{9-3(x+2)}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{3-3x}{x+2} \geq 0$$

ted' už jde o příklad ze začátku hodiny

Podmínka: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Nulové body:



	$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
$3-3x$	+	+	-
$x+2$	-	+	+
$\frac{3-3x}{x+2}$	-	+	-

$$K = (-2; 1)$$

Základem postupu bylo vytvoření jediného zlomku \Rightarrow metodě říkáme **převedení na podílový tvar**.

Př. 4: Vyřeš nerovnici: $\frac{9}{x+2} \geq 3$ tím, že odstraníš vynásobením zlomek v zadání.

Podmínka: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(x+2)$, může být kladný i záporný \Rightarrow musíme rozdělit řešení do dvou větví.

$$x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

(násobíme záporným číslem \Rightarrow znaménko se mění)

$$\frac{9}{x+2} \geq 3 \quad / \cdot (x+2)$$

$$9 \leq 3(x+2)$$

$$9 \leq 3x+6$$

$$3 \leq 3x$$

$$1 \leq x$$

Zdá se, že řešením je interval $\langle 1; \infty \rangle$, počítáme s čísly $x < -2$, v intervalu není žádné takové $K_1 = \emptyset$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

(násobíme kladným číslem \Rightarrow znaménko zůstává)

$$\frac{9}{x+2} \geq 3 \quad / \cdot (x+2)$$

$$9 \geq 3(x+2)$$

$$9 \geq 3x+6$$

$$3 \geq 3x$$

$$1 \geq x$$

Zdá se, že řešením je interval $(-\infty; 1)$, počítáme s čísly $x > -2$, získáme interval $(-2; 1)$

$$K_2 = (-2; 1)$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (-2; 1)$$

Základem metody bylo odstranění zlomku \Rightarrow říkáme ji **metoda odstraněním zlomku**, nevýhoda metody = nutnost dělit výpočet do dvou větví

Pedagogická poznámka: Metodu mají studenti probranou, ale připomenutí je většinou nutné. Mnoho kolegů ji vynechává a nutí studenty k převádění na podílový tvar (je fakt, že většina si podílový tvar raději vybírá sama). Já sám na jejím zvládnutí trvám, považuji za jeden z nejobecněji používaných postupů na střední škole a beru ji jako investici do budoucna (zejména pro absolutní hodnoty).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je obtížný ne myšlenkou, ale zdlouhavostí a složitostí. Většina chyb při řešení vyplývá z toho, že se studenti „ztratí“. Snažím se při opravování chyb upozorňovat zejména na to, že musí vědět, kde vlastně jsou a co počítají. Každopádně jeho cena je právě v jeho složitosti, v tom, že studenti musí několikrát přejít do „podprogramu“ něco spočítat a pak to použít dále (hlavně, když jej počítají odstraňováním zlomku). Proto je důležité, aby ho všichni spočítali pod dozorem a nemá cenu ho nechávat na doma.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $x \geq \frac{6}{5-x}$ převedením na podílový tvar i odstraněním zlomku.

a) převedení na podílový tvar (na pravé straně chceme nulu, aby platila úvaha o znaménkách)

Podmínka: $5-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

$$x \geq \frac{6}{5-x}$$

$$x - \frac{6}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{x(5-x)}{5-x} - \frac{6}{5-x} \geq 0$$

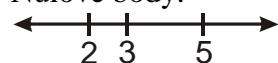
$$\frac{5x - x^2 - 6}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{-(x^2 - 5x + 6)}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{-(x-3)(x-2)}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{5-x} \leq 0 \quad \text{teď už můžeme použít tabulku}$$

Nulové body:



	$(-\infty; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 5)$	$(5; \infty)$
$x-3$	-	-	+	+
$x-2$	-	+	+	+

$5-x$	+	+	+	-
$\frac{(x-3)(x-2)}{5-x}$	+	-	+	-

$$K = \langle 2; 3 \rangle \cup (5; \infty)$$

b) odstraněním zlomku

Podmínka: $5-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

$$x \geq \frac{6}{5-x}$$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(5-x)$, může být kladný i záporný \Rightarrow musíme rozdělit řešení do dvou větví

$$(5-x) < 0 \Rightarrow x > 5$$

(násobíme záporným číslem \Rightarrow znaménko se mění)

$$x \geq \frac{6}{5-x} \quad / \cdot (5-x)$$

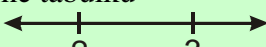
$$x(5-x) \leq 6$$

$$5x - x^2 \leq 6$$

$$-(x^2 + 5x - 6) \leq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$(x-3)(x-2) \geq 0$ nerovnice v součinném tvaru \Rightarrow děláme tabulku

Nulové body: 

	$(-\infty; 2)$	$(2; 3)$	$(3; \infty)$
$x-3$	-	-	+
$x-2$	-	+	+
$(x-3)(x-2)$	+	-	+

Zdá se, že řešením jsou intervaly $(-\infty; 2)$ a

$(5; \infty)$, počítáme s čísly $x > 5 \Rightarrow$

$$K_1 = (5; \infty)$$

$$K = \langle 2; 3 \rangle \cup (5; \infty)$$

$$(5-x) > 0 \Rightarrow x < 5$$

(násobíme kladným číslem \Rightarrow znaménko zůstává)

$$x \geq \frac{6}{5-x} \quad / \cdot (5-x)$$

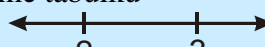
$$x(5-x) \geq 6$$

$$5x - x^2 \geq 6$$

$$-(x^2 + 5x - 6) \geq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$(x-3)(x-2) \leq 0$ nerovnice v součinném tvaru \Rightarrow děláme tabulku

Nulové body: 

	$(-\infty; 2)$	$(2; 3)$	$(3; \infty)$
$x-3$	-	-	+
$x-2$	-	+	+
$(x-3)(x-2)$	+	-	+

Zdá se, že řešením je interval $\langle 2; 3 \rangle$, počítáme

s čísly $x < 5 \Rightarrow K_2 = \langle 2; 3 \rangle$

Poznámka: Správnost výsledku si můžeme zkontrolovat úvahou. Když do nerovnice

$x \geq \frac{6}{5-x}$ dosadíme hodně velká kladná čísla získáme na pravé stran velké kladné číslo a na

levé malé záporné \Rightarrow nerovnice vyjde a její řešení tedy musí obsahovat interval s plus nekonečnem.

Př. 6: Petáková:
strana 12/cvičení 3 d) e) f)
strana 14/cvičení 19 b) c) e)

Shrnutí: Nerovnice s neznámou ve jmenovateli a s nenulovou pravou stranou buď převedeme na podílový tvar nebo řešíme odstraněním zlomku.