2.3.5 Nerovnice v podílovém tvaru I

Předpoklady: 2303, 2304

Pedagogická poznámka: Nerovnice v podílovém tvaru jsem původně probíral v jediné hodině. Studenti s ní měli velké problémy. Nakonec jsem si uvědomil, že se v této hodině opakují dvě látky zcela zásadní v dalším studiu – součinový tvar nerovnic a řešení nerovnice rozdělením definičního oboru a tak jsem hodinu rozdělil. U několik úvodních nerovnic je uvedena tabulková metoda, studenti samozřejmě mohou používat i libovolné urychlení. V dalších příkladech pak do rychlejšího postupu nutím všechny. V písemkách (i dalších hodinách) pak mohou používat cokoliv.

Pedagogická poznámka: Následující příklad opravdu zadávám bez jakéhokoliv vysvětlení a snažím se studenty dovést k tomu, že se dá hodně samostatně vymyslet, když si člověk umí všimnout podstatných věcí.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{x-3}{3x-2} \geq 0$.

V příkladu je zlomek $\Rightarrow$ musíme udělat podmínky: $3x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{2}{3}$.

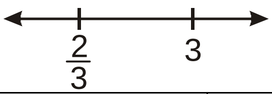
Nápad: Příklad trochu připomíná nerovnice v součinovém tvaru (například $(2-3x)(x+1) > 0$).

Stejné rysy:

- Na pravé straně nula $\Rightarrow$ záleží pouze na znaménkách výrazů v čitateli a jmenovateli.
- Dělení záporným číslem (stejně jako násobení záporným číslem) obrací znaménko výsledku (je to vlastně samozřejmé $\frac{x-3}{3x-2} = (x-3) \cdot \frac{1}{3x-2}$ dělení je násobení převráceným číslem).

$\Rightarrow$ Jde o fakticky „stejné“ příklady $\Rightarrow$ stejný postup.

Nulové body: $3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ $\qquad x-3=0 \Rightarrow x=3$



	$\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3};3\right)$	$(3;\infty)$
$(3x-2)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(2-3x)(x+1)$	+	-	+

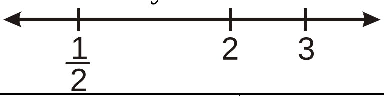
$\frac{2}{3}$ je vyloučeno podmínkou, 3 patří mezi řešení, protože nerovnost obsahuje $\geq$.

$K = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \langle 3; \infty)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x-3}{(2-x)(2x-1)} \leq 0$.

Podmínky: $2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ $\quad$ $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Nulové body:



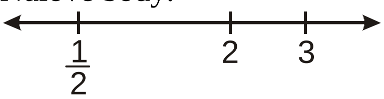
intervaly:	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 2\right)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$x-3$	-	-	-	+
$2-x$	+	+	-	-
$2x-1$	-	+	+	+
výsledky:	+	-	+	-

$K = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup \langle 3, \infty)$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\frac{(2-x)(2x-1)}{(x-3)} \leq 0$.

Podmínky: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Nulové body:



Postřeh: Stejné nulové body i stejné závorky jako v předchozím příkladě, jenom jinak rozmístěné ve zlomku $\Rightarrow$ využijeme tabulku předchozího příkladu, jenom se změní hrany intervalů.

$K = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle \cup (3; \infty)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má význam ze dvou důvodů:

Studenti se učí všímat si a šetřit si práci.

Studenti se učí, jak řešit hrany intervalů bez toho, aby ztráceli čas vyplňováním tabulky.

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů už mají studenti zakázané používaní tabulek. Jde o to, aby si procvičili rychlejší style řešení nerovnic v součinovém tvaru. Při písemce pak samozřejmě mohou používat libovolný postup.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\frac{(x+1)(x-3)}{1-2x} \geq 0$.

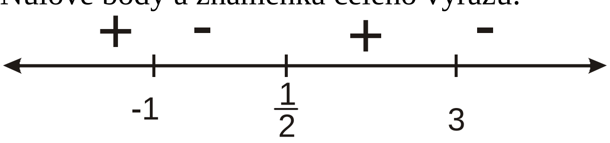
Podmínky: $1-2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Přepíšeme si nerovnici do součinového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\begin{matrix} - & - & + \\ \nearrow & \nearrow & \searrow \end{matrix}$$

$$(x+1)(x-3)\frac{1}{1-2x} \geq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu:



$K = (-\infty;-1\rangle \cup \left(\frac{1}{2};3\right\rangle$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\frac{2x+1}{(3-x)(1-x)} \geq 0$.

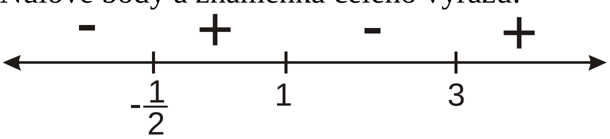
Podmínky: $3-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Přepíšeme si nerovnici do součinového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\begin{matrix} - & + & + \\ \nearrow & \searrow & \searrow \end{matrix}$$

$$(2x+1)\cdot\frac{1}{3-x}\cdot\frac{1}{1-x} \geq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu:



$K = \left\langle -\frac{1}{2};1\right) \cup (3;\infty)$

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \geq 0$.

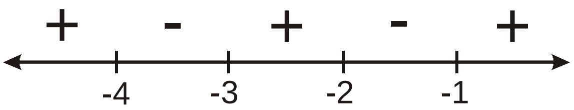
Podmínky: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$, $x+4 \neq 0 \Rightarrow$ $x \neq -4$

Přepíšeme si nerovnici do součinového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\begin{matrix} - & - & - & - \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \end{matrix}$$

$$\frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{1}{(x+2)}\cdot\frac{1}{(x+3)}\cdot\frac{1}{(x+4)} \geq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu:



$K = (-\infty;-4) \cup (-3;-2) \cup (-1;\infty)$

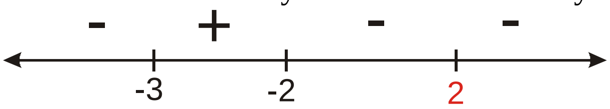
Př. 7: Vyřeš nerovnici $\dfrac{2-x}{(x+2)(x-2)(x+3)} \le 0$.

Podmínky: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$
Přepíšeme si nerovnici do součinového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\begin{array}{cccc} + & - & - & - \\ \searrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \end{array}$$

$$(2-x)\frac{1}{(x+2)}\cdot\frac{1}{(x-2)}\cdot\frac{1}{(x+3)} \ge 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu. Bod 2 si nakreslíme červeně, protože v něm mění znaménko dvě závorky a znaménko celého výrazu se tedy nezmění.



$K = (-\infty;-3) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$

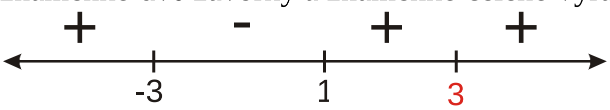
Př. 8: Vyřeš nerovnici $\dfrac{(1-x)(3-x)}{(x^2-9)(x^2+3)} \le 0$.

Podmínky: $x^2-9=(x-3)(x+3) \Rightarrow x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$,
$x^2+3>0$ platí vždy $\Rightarrow$ výraz x^2+3 nebudeme sledovat.
Přepíšeme si nerovnici do součinového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & - \\ \searrow & \searrow & \nearrow & \nearrow \end{array}$$

$$(1-x)(3-x)\cdot\frac{1}{(x-3)}\cdot\frac{1}{(x+3)} \ge 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu. Bod 3 si nakreslíme červeně, protože v něm mění znaménko dvě závorky a znaménko celého výrazu se tedy nezmění:



$K = \left(-3;1\right\rangle$

Př. 9: Petáková:
strana 12/cvičení 3 d) e) f)

Shrnutí: Řešení nerovnic v podílovém tvaru silně připomíná řešení nerovnic v součinovém tvaru.