

2.3.4 Rovnice v podílovém tvaru

Předpoklady: 2301

Řešíme rovnici: $\frac{2x+5}{3x-6} = 0$.

Nejdřív musíme zajistit, aby ve jmenovateli nebyla nula $\Rightarrow 3x-6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

Jakmile máme podmínku, na jmenovateli nezáleží. K tomu, aby byl celý zlomek nulový, stačí, když je nula v čitateli.

$$2x+5=0$$

$$2x=-5$$

$$x=-\frac{5}{2}$$

POZOR: Musíme zkontrolovat, jestli jsme výsledek nevyloučili v podmínkách.

$$K = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$$

Př. 1: Vyřeš rovnice:

$$\text{a) } \frac{3x-\sqrt{2}}{3x+2} = 0$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{5}x-5x+1}{13x-\sqrt{10}} = 0$$

$$\text{a) } \frac{3x-\sqrt{2}}{3x+2} = 0$$

$$\text{Podmínky: } 3x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{2}{3}$$

$$\text{Čítatel: } 3x-\sqrt{2} = 0.$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$K = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{5}x-5x+1}{13x-\sqrt{10}} = 0$$

$$\text{Podmínky: } 13x-\sqrt{10} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\sqrt{10}}{13}$$

$$\text{Čítatel: } \sqrt{5}x-5x+1 = 0.$$

$$x(\sqrt{5}-5) = -1$$

$$x = \frac{-1}{\sqrt{5}-5} = \frac{1}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{20}$$

$$K = \left\{ \frac{5+\sqrt{5}}{20} \right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnice:

$$\text{a) } \frac{x^2-x-6}{x-2} = 0$$

$$\text{b) } \frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} = 0$$

$$\text{a) } \frac{x^2-x-6}{x-2} = 0$$

$$\text{Podmínky: } x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

$$\text{Čítatel: } x^2-x-6 = 0.$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 3; x_2 = -2$$

$$K = \{-2; 3\}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} = 0$$

$$\text{Podmínky: } x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3; x \neq 1.$$

$$\text{Čítatel: } x^2 + 4x + 3 = 0.$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = -1$$

$$K = \{-3; -1\}$$

Pedagogická poznámka: V příkladu a) se studenti setkají se třemi typy problémů:

Někteří nedokážou rozložit mnohočleny na součin (chyba paměti).

Někteří si nepamatují, jak se řeší rovnice v součinnovém tvaru (opět paměť nebo neschopnost nahlédnout, že jde o stejný problém jako v minulé hodině).

Někteří mají problém se smířit s tím, že příklad má dvě řešení zatímco předchozí měly řešení pouze jedno (neopodstatněné sebeomezování).

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou nové tím, že vyžadují vyřazení jednoho z řešení kvůli podmínkám. Dopředu studenty neupozorňuji, jenom jim říkám (pokud kořen rovnice nevyřadí), že mají řešení špatně.

Př. 3: Vyřeš rovnice:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = 0$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = 0$$

$$\text{c) } \frac{4-x}{x^2 - 16} = 0$$

$$\text{a) } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = 0$$

$$\text{Podmínky: } x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2.$$

$$\text{Čítatel: } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-3) \cdot (x-2) = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2 \text{ (zakazuje podmínka } \Rightarrow 2 \text{ není kořenem)}$$

$$K = \{3\}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = 0$$

$$\text{Podmínky: } x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; x \neq -3.$$

$$\text{Čítatel: } (x+3) \cdot (x-3) = 0$$

$$x_1 = -3 \text{ (vyloučeno podmínkou)} \quad x_2 = 3$$

$$K = \{3\}$$

$$\text{c) } \frac{4-x}{x^2 - 16} = 0$$

$$\text{Podmínky: } x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 4.$$

$$\text{Čítatel: } 4 - x = 0$$

$$x = 4 \text{ (vyloučeno podmínkou } \Rightarrow \text{ rovnice nemá řešení)}$$

$$K = \emptyset$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\frac{3x-2}{x+5} = 2$.

Pozor: Na pravé straně není 0.

Podmínka: $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$.

Dvě možnosti řešení:

1) Odstranění zlomku

Odstraníme zlomek (máme podmínku \Rightarrow víme, že nenásobíme nulou) a řešíme jako obyčejnou lineární rovnici.

$$\frac{3x-2}{x+5} = 2 \quad / \cdot (x+5)$$

$$3x-2 = 2 \cdot (x+5)$$

$$3x-2 = 2x+10$$

$$x = 12$$

$$K = \{12\}$$

2) Převedením na podílový tvar

Převědeme 2 na levou stranu a pak řešíme jako předchozí příklady.

$$\frac{3x-2}{x+5} - 2 = 0$$

$$\frac{3x-2-2 \cdot (x+5)}{x+5} = 0$$

$$\frac{3x-2-2x-10}{x+5} = 0$$

$$\frac{x-12}{x+5} = 0$$

$$x = 12$$

$$K = \{12\}$$

Pedagogická poznámka: Všichni studenti řeší rovnici prvním způsobem. Druhý jim ukazují pouze jako druhou možnost.

Př. 5: Vyřeš rovnici $\frac{2x+6}{x+3} = 3$ odstraněním zlomku i převedením na podílový tvar.

Podmínka: $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

1) Odstraněním zlomku

$$\frac{2x+6}{x+3} = 3 \quad / \cdot (x+3)$$

$$2x+6 = 3 \cdot (x+3)$$

$$2x+6 = 3x+9$$

$$x = -3 \quad \text{Není řešením rovnice, vyloučili jsme na začátku v podmínce.}$$

$$K = \emptyset$$

2) Převedením na podílový tvar

$$\frac{2x+6}{x+3} - 3 = 0$$

$$\frac{2x+6-3(x+3)}{x+3} = 0$$

$$\frac{2x+6-3x-9}{x+3} = 0$$

$$\frac{-(x+3)}{x+3} = 0$$

$$-1 = 0$$

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Pokud studenti nestíhají doporučuji vynechat příklad 6 a spočítat příklady 7 a 8.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\frac{x-3}{x+2} + \frac{2x-3}{x-1} = 3$.

Podmínky: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Odstraníme zlomky:

$$\frac{x-3}{x+2} + \frac{2x-3}{x-1} = 3 \quad / \cdot (x+2)(x-1)$$

$$(x-3)(x-1) + (2x-3)(x+2) = 3(x+2)(x-1)$$

$$x^2 - x - 3x + 3 + 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 3(x^2 - x + 2x - 2)$$

$$3x^2 - 3x - 3 = 3x^2 + 3x - 6$$

$$3 = 6x$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2-x}{x-3} + \frac{4}{(x+1)(x-3)}$ v množině celých čísel.

Podmínky: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2-x}{x-3} + \frac{4}{(x+1)(x-3)} \quad / \cdot (x+1)(x-3)$$

$$(x-3)(x-1) = (2-x)(x-3) + 4$$

$$x^2 - x - 3x + 3 = 2x + 2 - x^2 - x + 4$$

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + x + 6$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Kvadratická rovnice \Rightarrow vzorec už známe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Kontrola s podmínkami a zadáním:

3 – není kořen (podmínka)

$-\frac{1}{2}$ – není kořen (není celé číslo)

$$K = \emptyset$$

Př. 8: Ve kterých množinách má předcházející příklad řešení?

V takových množinách, které obsahují číslo $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ například v množině racionálních nebo reálných čísel.

Př. 9: Petáková:
strana 12/cvičení 3 a) b)

Shrnutí: Při řešení rovnic v podílovém tvaru musíme kontrolovat, zda zjištěné kořeny nejsou v rozporu s podmínkami pro definiční obor výrazů.