

### 2.3.1 Rovnice v součinném tvaru

**Předpoklady:** 1710, 2203

**Pedagogická poznámka:** Hodina obsahuje poměrně dost příkladů (20). I když je někteří stihli vypočítat, mám trochu obavu, zda postup nebyl příliš rychlý. Pokud by se mělo něco vynechávat, doporučoval bych část příkladu 5, kde jde v podstatě pouze o opakování rozkladů na součin.

Řešíme rovnici:  $(x+3)(2x-1) = 0$ .

Obě strany rovnice jsou čísla:

- Pravá strana = nula.
- Levá strana = součin čísel (závorka znamená číslo), který má vyjít 0 (aby platila rovnice).

⇒ 2 možnosti:

- Ani jedno z čísel v součinu na levé straně není 0 ⇒ součin také není 0 ⇒ rovnice nevyjde.
- Alespoň jedno číslo v součinu je 0 ⇒ součin je 0, bez ohledu na ostatní čísla ⇒ rovnice vyjde.

⇒ Zjistíme, pro která  $x$  se jednotlivé závorky rovnají 0, a máme kořeny rovnice.

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $(x+3)(2x-1) = 0$ .

První závorka se rovná nule:

$$x+3=0$$

$$x=-3$$

Druhá závorka se rovná nule:

$$2x-1=0$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$$

Mohli bychom stejným způsobem řešit rovnici  $(x+3)(2x-1) = 1$ ?

Záleží na tom, jak můžeme získat 1 jako součin dvou čísel: nekonečně mnoho způsobů

(například  $1=1 \cdot 1$ ,  $1=2 \cdot \frac{1}{2}$ ,  $1=3 \cdot \frac{1}{3}$ , ...) ⇒ nemůžeme o žádné ze závorek prohlásit, že se

určitě rovná nějakému číslu ⇒ takto rovnici bez nuly na pravé straně nespočítáme.

**Řešením rovnice v součinném tvaru (s nulou na jedné straně), jsou všechna čísla, pro která se libovolná ze závorek v součinu rovná nule.**

**Pravidlo je možné použít pouze tehdy, když je jedna strana rovnice rovna nule.**

**Pedagogická poznámka:** Připomínám studentům, že tento typ rovnic budou během svého studia potřebovat v různých situacích velmi často ve všech ročnících. Například

při počítání průběhu funkce na konci čtvrtáku patří řešení rovnic převoditelných na součinný tvar mezi největší problémy.

**Př. 2:** Vyřeš rovnice:

a)  $(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$

b)  $x(3x+1)(x+\sqrt{2})(4x-\pi)=0$

c)  $(3x+2)(x\sqrt{2}+1)(\pi^2x+\pi)=0$

d)  $(x\sqrt{2}-x-1)(\pi x+\sqrt{2})(x^2+1)=0$

a)  $(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$

$(x+1)=0$                        $(x-3)=0$                        $(x+\pi)=0$

$x=-1$                                $x=3$                                $x=-\pi$

$K = \{-1; 3; -\pi\}$

b)  $x(3x+1)(x+\sqrt{2})(4x-\pi)=0$

$x=0$                                $(3x+1)=0$                        $(x+\sqrt{2})=0$                        $(4x-\pi)=0$

$x=-\frac{1}{3}$                                $x=-\sqrt{2}$                                $x=\frac{\pi}{4}$

$K = \left\{-\sqrt{2}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{\pi}{4}\right\}$

c)  $(3x+2)(x\sqrt{2}+1)(\pi^2x+\pi)=0$

$(3x+2)=0$                        $(x\sqrt{2}+1)=0$                        $(\pi^2x+\pi)=0$

$x=-\frac{2}{3}$                                $x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$                        $\pi^2x = -\pi$

$x = -\frac{\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$

$K = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{\pi}\right\}$

d)  $(x\sqrt{2}-x-1)(\pi x+\sqrt{2})(x^2+1)=0$

$(x\sqrt{2}-x-1)=0$                        $(\pi x+\sqrt{2})=0$

$x(\sqrt{2}-1)=1$                                $x=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$                                $(x^2+1)=0$  - nejde nikdy

$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$

$K = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{\pi}; \sqrt{2}+1\right\}$

**Pedagogická poznámka:** Problémy mají někteří s body:

b) Kde zapomínají na 0 ( $x$  stojící před závorkami neberou v úvahu).

d) Kde přidávají řešení kvůli závorce  $x^2+1$ , která se nule nikdy nerovná.

**Př. 3:** Najdi chybu v následujícím postupu:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x = 2$$

Chyba: Není pravda, že platí  $\sqrt{x^2} = x$ . Platí  $\sqrt{x^2} = |x|$ .  $\Rightarrow$  Správný postup:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = 2$$

$$K = \{-2; 2\}$$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $x^2 - 4 = 0$  bez použití odmocňování.

Použijeme součinnový tvar  $\Rightarrow$  musíme z výrazu  $x^2 - 4$  vyrobit součin (proto jsme se učili rozklady na součin).

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$K = \{-2; 2\}$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnice převedením na součinnový tvar:

a)  $x^2 - 9 = 0$

b)  $x^2 - x - 12 = 0$

c)  $x^4 - 4 = 0$

d)  $(9x^2 - 4)(1 - x^2) = 0$

e)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

a)  $x^2 - 9 = 0$

$$(x-3)(x+3) = 0$$

$$K = \{-3; 3\}$$

c)  $x^4 - 4 = 0$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0$$

$$K = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

e)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$x^3 - x - 2x^2 + 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$K = \{-1; 1; 2\}$$

b)  $x^2 - x - 12 = 0$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$K = \{-3; 4\}$$

d)  $(9x^2 - 4)(1 - x^2) = 0$

$$(3x-2)(3x+2)(1-x)(1+x) = 0$$

$$K = \left\{-1; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\}$$

**Př. 6:** Vyřeš rovnici:  $x^2 - 3x = 4$ .

Rovnice není v součinném stavu  $\Rightarrow$  nejde použít dnešní postup  $\Rightarrow$  předěláme si ji tak, aby napravo vznikla nula:  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$K = \{-1, 4\}$$

**Pedagogická poznámka:** Pře řešení příkladu se objevují dvě chyby vedoucí ke stejnému špatnému řešení. Kromě rozkladu  $x(x-3) = 4$ , který porušuje podmínku nulové pravé strany, někteří studenti převedou čtyřku doleva, kde už mají rozloženou původní levou stranu  $x(x-3) - 4 = 0$ . Vpravo je sice nula, ale součinný tvar nejde použít, protože na levé straně není součin. Myslím, že zde je dobré místo připomenout studentům, jaké výhody má, když si s pravidlem pamatují i jeho odůvodnění. Pokud totiž chápou, kde se vzala možnost využívat součinný tvar, ani jednu z předchozích chyb nemohou udělat.

**Př. 7:** Vyřeš rovnici:  $x(x-1) = 6$ .

Rovnice není v součinném stavu (vpravo není nula, součin vlevo nestačí)  $\Rightarrow$  nejde použít dnešní postup  $\Rightarrow$  předěláme si ji, aby vznikla nula vpravo a roznásobíme závorku:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Ted' má smysl dělat součin:  $(x-3)(x+2) = 0$ .

$$K = \{-2, 3\}$$

**Př. 8:** Najdi chybu v následujícím postupu:

$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$(x-1)(x+1) = x+1 \quad /:(x+1)$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

Špatný krok:  $(x-1)(x+1) = x+1 \quad /:(x+1)$ . Dělíme výrazem s neznámou a neděláme podmínku  $\Rightarrow$  pokud by platilo  $x+1 = 0$  dělili bychom nulou a ztratili kořen.

Správné řešení:

$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$(x-1)(x+1) = x+1 \quad /:(x+1) \quad x \neq -1$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

Kontrolujeme zakázané  $x = -1$  dosazením do tvaru před dělením:

$$(-1)^2 - 1 = (-1) + 1$$

$0 = 0 \Rightarrow$  Pro  $x = -1$  rovnice vychází  $\Rightarrow x = -1$  je také kořenem.

$$K = \{-1; 2\}$$

Pokud se zdá, že můžeme rovnici výrazem vydělit, můžeme rovnici převést na součinný tvar.

**Př. 9:** Řeš rovnici  $x^2 - 1 = x + 1$  převedením na součinný tvar.

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= x + 1 \\(x-1)(x+1) - (x+1) &= 0 \\(x+1)[(x-1)-1] &= 0 \\(x+1)(x-2) &= 0 & K = \{-1; 2\}\end{aligned}$$

**Př. 10:** Řeš rovnice převedením na součinný tvar:

a)  $y(y+1) = (y+1)(y+3)$

b)  $x^2 - 4 = x - 2$

c)  $9 - x^2 = x - 3$

d)  $3x^2 - 2x = 5x^2 + 3x$

a)  $2y(y+1) = (y+1)(y+3)$   
 $2y(y+1) - (y+1)(y+3) = 0$   
 $(y+1)[2y - (y+3)] = 0$   
 $(y+1)(y-3) = 0$   
 $K = \{-1; 3\}$

b)  $x^2 - 4 = x - 2$   
 $(x-2)(x+2) - (x-2) = 0$   
 $(x-2)[(x+2)-1] = 0$   
 $(x-2)(x+1) = 0$   
 $K = \{-1; 2\}$

c)  $9 - x^2 = x - 3$   
 $(3-x)(3+x) - (x-3) = 0$   
 $(3-x)(3+x) + (3-x) = 0$   
 $(3-x)[(3+x)+1] = 0$   
 $(3-x)(x+4) = 0$   
 $K = \{-4; 3\}$

d)  $3x^2 - 2x = 5x^2 + 3x$   
 $0 = 2x^2 + 5x$   
 $0 = x(2x+5)$   
 $K = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$

**Poznámka:** Předchozí příklady je samozřejmě možné (zřejmě asi i výhodněji) řešit takto:

$$\begin{aligned}x^2 - 4 &= x - 2 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\(x-2)(x+1) &= 0 & K = \{-1; 2\}\end{aligned}$$

**Př. 11:** Petáková:

strana 12/cvičení 2 a) b)

**Shrnutí:** Pokud má rovnice na jedné straně nulu a na druhé je možné vytvořit součin, vypočteme jednotlivé kořeny snadno z jednotlivých členů součinu.