2.2.11 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice II

Předpoklady: 2210

Př. 1: Otec s dcerou šli na výlet. Otcův krok měří 80 cm, dcera je ještě malá a jeden krok má dlouhý pouze 50 cm. Jak dlouhý byl výlet, když dcera ušla o tři tisíce kroků více než otec.

Počet kroků otce … k
Počet kroků dcery … $k+3000$
Vzdálenost, kterou ušli … v
Otec ušel $v=0,8k$
Dcera ušla $v=0,5(k+3000)$

$0,8k=0,5(k+3000)$

$0,8k=0,5k+1500$

$0,3k=1500$

$k=\frac{1500}{0,3}=5000$ $\Rightarrow$ Otec ušel 5000 kroků.

$v=0,8k=0,8\cdot 5000=4000$

Výlet byl dlouhý 4000 m.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba je uvedena v následujícím příkladu jako bod a). Někteří studenti spočítají pouze počet kroků a zapomenou z něj vypočítat ušlou vzdálenost.

Př. 2: Následující rovnice jsou neúspěšnými pokusy o vyřešení předchozího příkladu. Pokus se je interpretovat a oprav chyby, které se v nich vyskytují.

a) $0,8k=3000+0,5k$
b) $0,8k_o=0,5(k_d+3000)$
c) $0,8k_o+0,5k_d+3000=v$
d) $0,8k+0,5(k+3000)=v$
e) $\frac{v}{0,8}=\frac{v}{0,5}+3000\cdot 0,5$

a) $0,8k=3000+0,5k$

Pokus je podobný výše použitému řešení. Výrazy $0,8k$ a $0,5k$ mají význam vzdáleností (délka kroku * počet kroků) a nemůžeme je sčítat s kroky $\Rightarrow$ správně $0,8k=0,5\cdot 3000+0,5k$.

b) $0,8k_o=0,5(k_d+3000)$

Opět pokus o klasické řešení, porovnáním vzdálenosti, kterou ušel otec a dcera.
Chyba vznikla asi snahou udělat dva kroky najednou.
Správně:

$0,8k_o=0,5k_d$ (otec ušel stejně jako dcera)

$0,8k_o=0,5(k_o+3000)$ (dcera udělala o 3000 kroků víc)

c) $0,8k_o+0,5k_d+3000=v$

Několik chyb: Opět se sčítá vzdálenost s kroky jako v prvním případě. Navíc rovnice nepopisuje realitu, vzdálenost, kterou výletníci, ušli počítá jako součet vzdálenosti, kterou ušel otec, a vzdálenosti, kterou ušla dcera (nesmysl), ke které navíc přičítá počet kroků. Spíše než pokus o logické vyřešení příkladu, jde o sestavení libovolné rovnice, která obsahuje všechny údaje ze zadání.

d) $0,8k + 0,5(k + 3000) = v$

Dobře napsaná rovnice popisující špatný předpoklad: vzdálenost ušlá otcem + vzdálenost ušlá dcerou = délka výletu.

Správná úvaha: vzdálenost ušlá otcem = vzdálenost ušlá dcerou = délka výletu.

$0,8k = 0,5(k + 3000) = v$

e) $\frac{v}{0,8} = \frac{v}{0,5} + 3000 \cdot 0,5$

Zajímavý nápad, umožňuje určit rovnou délku výletu.

Výraz $\frac{v}{0,8}$ určuje počet kroků, které ušel otec,výraz $\frac{v}{0,5}$ počet kroků dcery $\Rightarrow$ v rovnici nemůže vystupovat výraz $3000 \cdot 0,5$ (vzdálenost ušlá dcerou při 3000 krocích), musí tam být pouze počet 3000 kroků.

Vztah mezi počtem kroků otce a dcery je obrácený: $k_o + 3000 = k_d \;\Rightarrow\; \frac{v}{0,8} + 3000 = \frac{v}{0,5}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má svůj význam. Právě fakt, že studenti sestavují rovnice zcela odtrženě od jakéhokoliv významu a bez jakékoliv kontroly, vede k tomu, že slovní úlohy řešit neumějí. Snažím se je dovést k tomu, že nejdůležitější je sestavovat rovnice podle reality a umět zkontrolovat význam každého výrazu v nich.

Dalším vodítkem je v podstatě fyzikální pravidlo, že sčítat je možné pouze stejné věci (vzdálenosti mezi sebou, kroky mezi sebou, ale ne obojí dohromady).

Př. 3: Nádoba na 30 litrů vody se má naplnit vodou o teplotě 30°C. Kolik litrů vody o teplotě 80°C a kolik litrů vody o teplotě 20°C se musí smíchat?

Množství vody o teplotě 80°C … t

Množství vody o teplotě 20°C … s

Voda 80°C + voda 20°C = voda v nádobě: $t + s = 30 \;\Rightarrow\; t = 30 - s$.

Teplo ve vodě 80°C + teplo ve vodě 20°C = teplo ve vodě voda 30°C:

$80t + 20s = 30 \cdot 30$.

$80(30 - s) + 20s = 900$

$2400 - 900 = 80s - 20s$

$1500 = 60s$

$s = 25$

Počet litrů vody o teplotě $80°C$: $t + 25 = 30 \;\Rightarrow\; t = 5$.

Bude třeba 5 litrů 80°C a 25 litrů 20°C vody.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad a všechny zbývající v této hodině, jsou postaveny na tom, že sledujeme množství něčeho, co zůstává po celou dobu stejné („tepla“ v předchozím příkladu, čistých kyselin v následujících). To je logický postup a snažím se ho studentům předat.

Naopak bojuji proti používání směšovacích rovnic nebo křížových pravidel. Oblast jejich použití je z hlediska typologie příkladů malá (i když tam spadá většina chemických aplikací), přínos z hlediska logického přemýšlení nebo schopnosti řešit slovní úlohy nulový (nebo spíš podobně jako u vzorců pro procenta záporný, neboť sugerují studentům představu, že je správně něco počítat a nevědět proč).
Nejčastější chyba $80t + 20s = 30$ - opět stačí poukázat, že srovnávat a sčítat můžeme pouze stejné věci.

Př. 4: Smícháním 6 litrů 50% kyseliny octové a 3 litrů 8% kyseliny octové vznikl nový roztok této kyseliny. Urči jeho koncentraci.

Koncentrace výsledného roztoku … x

Čistá kyselina v 1. roztoku + čistá kyselina v 2. roztoku = čistá kyselina ve výsledném roztoku: $6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,08 = 9x$

$3 + 0,24 = 9x$

$3,24 = 9x$

$x = 0,36$

Výsledný roztok má koncentraci 36%.

Pedagogická poznámka: Opět nejčastější chyba $6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,08 = x$. Je třeba trvat na tom, aby rovnice měla význam.

Př. 5: Kolik kg 96% roztoku kyseliny sírové musíme přilít k 9 kg 8% roztoku této kyseliny, abychom dostali její 60% roztok?

Hmotnost přilévaného 96% roztoku ... k
Hmotnost výsledného 60% roztoku … v

Hmotnost 96% roztoku + hmotnost 8% roztoku = hmotnost výsledného 60% roztoku:
$k + 9 = v$.
Čistá kyselina v 96% roztoku + čistá kyselina v 8% roztoku = čistá kyselina ve výsledném 60 % roztoku: $0,96k + 9 \cdot 0,08 = 0,6v$.
Dosadíme za *v* do druhé rovnice:

$0,96k + 9 \cdot 0,08 = 0,6(9 + k)$

$0,96k + 0,72 = 5,4 + 0,6k$

$0,96k - 0,6k = 5,4 - 0,72$

$0,36k = 4,68$

$k = 13$

Je třeba přilít 13kg 96% roztoku kyseliny sírové.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sestaví ihned rovnici $0,96k + 9 \cdot 0,08 = 0,6(9 + k)$, což je samozřejmě v pořádku.

Př. 6: Kolika gramy vody musíme zředit 300g 40% kyseliny dusičné, aby zředěná kyselina měla koncentraci 15%?

Množství přilité vody … v

Množství výsledného roztoku … r

Hmotnost 30% roztoku + hmotnost vody = hmotnost výsledného roztoku: $300+v=r$.
Čistá kyselina v 30% roztoku + čistá kyselina ve vodě (0% roztok) = čistá kyselina ve výsledném 15 % roztoku: $0,4\cdot 300+0\cdot v=0,15(300+v)$.

$120+0=45+0,15v$

$0,15v=75$

$v=500$

Příklad můžeme také řešit přes obsah čisté vody:
40% roztok kyseliny ve vodě = 60% roztok vody v kyselině
15% roztok kyseliny ve vodě = 85% roztok vody v kyselině

Čistá voda v 30% roztoku + čistá voda ve vodě (100% roztok) = čistá voda ve výsledném 15 % roztoku: $300\cdot 0,6+v=0,85(v+300)$.

$180+v=0,85v+255$

$v-0,85v=255-180$

$0,15v=75$

$v=500$

Kyselinu musíme zředit 500g vody.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba vypadá takto: $0,4\cdot 300+1\cdot v=0,15(300+v)$ - do rovnice pro 100% čistou kyselinu se přidá voda. Vysvětlujeme si, že jde opět o sčítání různých věcí dohromady.

Př. 7: V mlékárně vyrábějí polotučné mléko (s obsahem 1,5% tuku) tak, že z tučného mléka (s obsahem 4% tuku) odstředěním část tuku odeberou. Z kolika kilogramů tučného mléka vyrobí 1 tunu mléka polotučného?

Hmotnost tučného mléka … x
Protože množství tuku se během odtučnění změní (část ho odeberou), nemůžeme příklad počítat přes zachování množství tuku. Vyjdeme ze zachování množství čistého mléka bez tuku.
Koncentrace čistého mléka v tučném mléku: $1-0,04=0,96$.
Koncentrace čistého mléka v polotučném mléku: $1-0,015=0,985$.
Čisté mléko před odstředěním = čisté mléko po odstředění: $0,96x=0,985\cdot 1000$.

$0,96x=985$

$x=1026$

Z 1026 kg tučného mléka vyrobí v mlékárně 1000 kg mléka polotučného.

Pedagogická poznámka: Ke správnému řešení se studenti dostanou pouze přes dvě překážky:
Musí si uvědomit, že nemohou použít na sestavování rovnice tuk, protože se mění jeho množství.
Musí si uvědomit, že po celou dobu zůstává stejné množství čistého (odtučněného mléka).

Př. 8: Petáková:
strana 19/cvičení 55
strana 19/cvičení 56
strana 19/cvičení 57

Shrnutí: Při řešení slovních úloh na smíchávání vycházíme z toho, že se množství něčeho zachovává.