2.2.6 Lineární nerovnice

Předpoklady: 2205

Pedagogická poznámka: Sestavování tabulky trvá čtvrt hodiny až 20 minut. Spočítat všechny příklady stihne tak polovina studentů. Ti nejpomalejší se dokázali dopočítat až k příkladu 3. Doporučuji dojet hodinu i s pomalejšími až do konce někdy později a ostatní nechat samostatně počítat se sbírky.

Lineární nerovnice jsou všechny rovnice, které můžeme zapsat ve tvaru $ax+b<0$ ($ax+b>0$, $ax+b\le 0$, $ax+b\ge 0$) (neznámá je pouze v první mocnině).

Opět využijeme podobnost s lineární funkcí.
Rozebereme pouze nerovnici ve tvaru $ax+b<0$, ostatní možnosti lze rozebrat podobným způsobem:

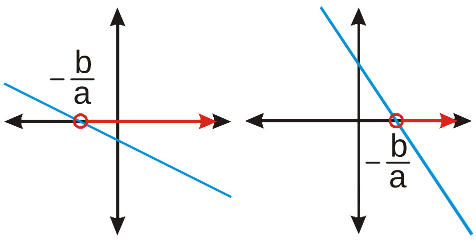
Lineární nerovnice $ax+b<0$
Hledáme, kdy je výraz $ax+b$ menší než 0.

Lineární funkce $y=ax+b$
Hledáme, kdy $y<0$ $\Rightarrow$ hledáme body grafu funkce, které leží pod osou *x* (jejich *y*-ová souřadnice je menší než nula).
Kreslíme graf funkce a hledáme, které části jsou pod osou *x*.

Řešíme nerovnici:
$ax<b=0 \quad /-b$
$ax<-b \quad /$ Chceme dělit číslem *a*. Jde to pouze, když $a\ne 0 \Rightarrow$ další postup záleží na znaménku čísla *a*.

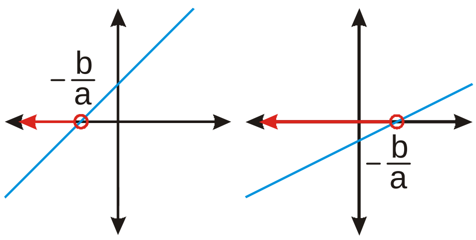
1. Předpokládáme $a<0$.
$ax<-b \quad /:a$ Dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme znaménko.
$x>-\frac{b}{a}$
Řešením je interval $K=\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$.

Grafy lineárních funkcí $y=ax+b$, $a<0$



2. Předpokládáme $a>0$.
$ax<-b \quad /:a$ Dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko neobracíme.
$x<-\frac{b}{a}$
Řešením interval $K=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

Grafy lineárních funkcí $y=ax+b$, $a>0$



3. Pokračujeme v řešení, $a=0$.
$\Rightarrow$ Nemůžeme vydělit rovnici, ale víme, které konkrétní *a* nás zajímá $\Rightarrow$ můžeme ho dosadit.

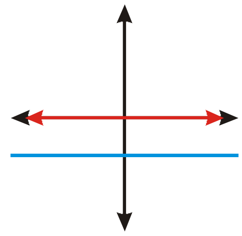
$$0\cdot x<-b$$

Výsledek záleží na hodnotě *b*.

3. a) Je-li $-b>0 \Rightarrow b<0$, řešením

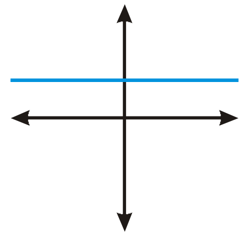
Funkce $y=b \quad b<0$

nerovnice jsou všechna reálná čísla.
$K = R$



Funkce $y = b \quad b > 0$

3. b) Je-li $-b < 0 \Rightarrow b > 0$, nerovnice nemá řešení.
$K = \emptyset$



S konkrétními čísly to bude jednodušší, učit se tabulku nazpaměť je rozhodně nesmysl.

Něco na rozehřátí:

Př. 1: Vyřeš nerovnice:
a) $2x \geq 0$ b) $-3x < 0$ c) $0x \leq 2$ d) $0x \geq 0$

a) $2x \geq 0$
$x \geq 0$
$K = \langle 0; \infty)$

b) $-3x < 0$
$x > 0$
$K = (0; \infty)$

c) $0x \leq 2$
$K = R$

d) $0x \geq 0$
$K = R$

Pedagogická poznámka: Studenti mají s předchozím příkladem rozhodně více problémů než s následujícím. Hlavně u bodů c) d) je potřeba, aby si situaci rozmysleli a „osahali“ dosazováním čísel za *x*.

U složitějších příkladů postupujeme podobně jako při řešení lineárních rovnic.

Př. 2: Vyřeš nerovnice:
a) $3x - 7 \leq 5x - 13$ b) $3(2 + x) - (x - 1) < 2(x + 1)$
c) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 2 \geq 2(x+1)$ d) $(x-2)^2 \geq (x+1)(x-5)$
e) $\frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{3} < \frac{x+4}{6} + \frac{7-3x}{12}$

a) $3x - 7 \leq 5x - 13$
$6 \leq 2x$
$3 \leq x$
$K = \langle 3; \infty)$

b) $3(2 + x) - (x - 1) < 2(x + 1)$
$6 + 3x - x + 1 < 2x + 2$
$0x < -5$
$K = \emptyset$

c) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 2 \geq 2(x+1)$

d)

$x^2+2x+1-\left(x^2-2x+1\right)+2\geq 2x+2$
$x^2+2x+1-x^2+2x-1\geq 2x$
$4x\geq 2x$
$4x-2x\geq 0$
$2x\geq 0$
$x\geq 0$
$K=\langle 0;\infty)$

$(x-2)^2\geq (x+1)(x-5)$
$x^2-4x+4\geq x^2-5x+x-5$
$-4x+4\geq -4x-5$
$0x\geq -9$
$K=R$

e) $\frac{x+1}{4}-\frac{x-3}{3}<\frac{x+4}{6}+\frac{7-3x}{12}\quad /\cdot 12$
$3(x+1)-4(x-3)<2(x+4)+7-3x$
$3x+3-4x+12<2x+8+7-3x$
$-x+15<-x+15$
$0x<0$
$K=\emptyset$

Př. 3: Vyřeš nerovnice:
a) $\sqrt{3}x+3\geq 2-x$ b) $x+3\geq 7+\sqrt{2}x$

a) $\sqrt{3}x+3\geq 2-x$
$x+\sqrt{3}x\geq -1$
$x\left(1+\sqrt{3}\right)\geq -1$
$x\geq \frac{-1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1-3}=\frac{\sqrt{3}-1}{-2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $K=\left\langle \frac{1-\sqrt{3}}{2};\infty\right)$

b) $x+3\geq 7+\sqrt{2}x$
$x-\sqrt{2}x\geq 4$
$x\left(1-\sqrt{2}\right)\geq 4$
$x\leq \frac{4}{1-\sqrt{2}}$ (číslo $1-\sqrt{2}$ je záporné)
$x\leq \frac{4}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{1-2}=-4\left(\sqrt{2}+1\right)$ $K=\left(-\infty;-4\sqrt{2}-4\right\rangle$

Pedagogická poznámka: Příklad je zajímavý z hlediska paměti. Problém s odmocninou, která násobí neznámou, řešili studenti u lineárních rovnic (tedy před nedávnem). Přesto si někteří vůbec nepamatují, jak se k němu postavit. Snažím se jim vysvětlit, že stejně jako je nesmyslné učit se nazpaměť příklady, je dobré si pamatovat fígle, které pomáhají řešit problémy, na které nestačíme.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $ax-b\geq 0$, pokud platí $a<0$. Správnost početního řešení ověř graficky.

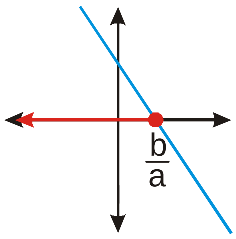
$ax-b\geq 0 \quad /+b$

$ax\geq b \quad /:a$ Dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme znaménko.

$x\leq \frac{b}{a}$ $K=\left(-\infty;\frac{b}{a}\right\rangle$

Lineární funkce $y=ax-b$, $a<0$

Řešíme nerovnici $ax-b\geq 0$ $\Rightarrow$ hledáme části grafu nad osou *x*.



$K=\left(-\infty;\frac{b}{a}\right\rangle$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti neobrátí znaménko při dělení *a*, jiní nenakreslí graf klesající funkce. Největším problémem je ale fakt, že většina z těch, kteří udělají chybu, dojde přesto do stavu, že oběma způsoby získají stejné řešení. Obrázek zkrátka nakreslí tak, aby jim vyšlo to samé co u výpočtu.
Snažím se s tím bojovat, protože tento postup fakticky znemožňuje kontrolování. Je potřeba, aby se studenti naučili v podobných situacích „zapomenout“, k jakému výsledku došli a počítali druhým způsobem zcela od začátku.
Hodně to souvisí s tím, že studenti jenom částečně postupují podle pravidel. Nemají zažité, že pravidla jsou striktní a musí se dodržovat za všech okolností.

Př. 5: Petáková:
strana 12/cvičení 1 f) g)

Shrnutí: Řešení lineárních nerovnic je hodně podobné řešení rovnic až na obracení znaménka při násobení (dělení) záporným číslem. Větší pozornost vyžaduje závěrečná interpretace výsledku do množiny všech řešení.