

2.1.17 Příklady s $f(x)$

Předpoklady: 2111

Pedagogická poznámka: Tato lekce nezapadá zcela do normálního průběhu vyučování, ale zjistil jsem, že studenti mají poměrně značné problémy (spíš psychického rázu) s příklady, ve kterých se vyskytují zápisy typu $f(x+1)$. Nic převratného se studenti nenaučí, ale na tyto zápisy si zvyknou. Časem se jim to bude hodit.

Krátké opakování:

Lineární funkce $y = ax + b$, hodnoty se mění stále stejně rychle, konstanta a udává sklon grafu a tedy i to, jak rychle se mění hodnoty funkce.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Př. 1: Je dána lineární funkce $y = f(x) = 2x - 1$.

a) urči $f(x)$ pro $x = \{-10; -\sqrt{7}; 0; 1968\}$

b) urči $f(x+1)$ pro $x = \{-4; 10\}$

c) pro $x = 2$ urči $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x-1)$ a $f(2x)$

a) urči $f(x)$ pro $x = \{-10; -\sqrt{7}; 0; 1968\}$

$$f(-10) = 2(-10) - 1 = -21$$

$$f(-\sqrt{7}) = 2(-\sqrt{7}) - 1 = -2\sqrt{7} - 1$$

$$f(0) = 2(0) - 1 = -1$$

$$f(1968) = 2(1968) - 1 = 3936 - 1 = 3935$$

b) urči $f(x+1)$ pro $x = \{-4; 10\}$

$$f(-4+1) = f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$$

$$f(10+1) = f(11) = 2(11) - 1 = 21$$

c) pro $x = 2$ urči $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x-1)$ a $f(2x)$

$$f(x) = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(x+3) = 2(x+3) - 1 = 2(2+3) - 1 = 9$$

$$f(x-1) = 2(x-1) - 1 = 2(2-1) - 1 = 1$$

$$f(2x) = 2(2x) - 1 = 2(2 \cdot 2) - 1 = 7$$

Pedagogická poznámka: Část a) studenti spočítají bez problémů, v části b) naopak problémy často mají. Není nutné jim rovnou prozrazovat, jak mají hodnoty spočítat, naprosté

většinou stačí, když jim připomenete, že mají **trvat na důsledném a opatrném dosazování** (dodržování pravidel) a vyhnout se odhadování výsledků.

- Př. 2:** a) Urči rozdíl $f(x+1) - f(x)$ u funkce $y = 3x - 1$ pro $x = 1$ a pro $x = 5$.
b) porovnej předchozí výsledky a předpis funkce
c) nakresli graf funkce $y = 3x - 1$ a vyznač do ní rozdíl $f(x+1) - f(x)$ pro $x = 1$.
Jak se obrázek změní pro jinou hodnotu x ?
d) spočti hodnotu $f(x+1) - f(x)$ u funkce $y = 3x - 1$ pro libovolné x .
e) spočti hodnotu $f(x+1) - f(x)$ pro obecnou lineární funkci $y = ax + b$

a)

$$x = 1$$

$$f(x+1) - f(x) = [3(x+1) - 1] - [3x - 1] = [3(1+1) - 1] - [3 \cdot 1 - 1] = 5 - 2 = 3$$

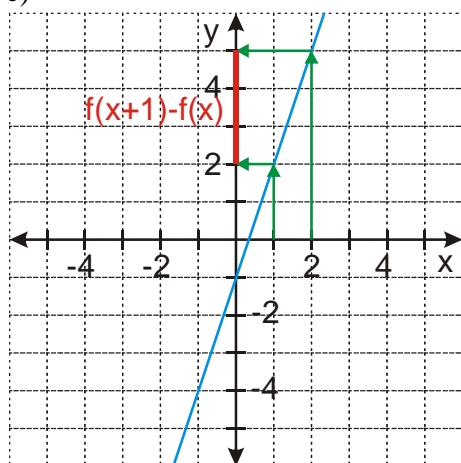
$$x = 5$$

$$f(x+1) - f(x) = [3(x+1) - 1] - [3x - 1] = [3(5+1) - 1] - [3 \cdot 5 - 1] = 17 - 14 = 3$$

b)

hodnoty rozdílu $f(x+1) - f(x)$ jsou v obou případech stejné a rovnají se konstantě a v předpisu funkce

c)



Když změním hodnotu x , posunu se po přímce jinam, ale hodnota $f(x+1) - f(x)$ se nezmění

d)

$$f(x+1) - f(x) = [3(x+1) - 1] - [3x - 1] = 3x + 3 - 1 - 3x + 1 = 3$$

Hodnota je opravdu stále stejná a rovná se parametru a v předpisu funkce.

e)

$$f(x+1) - f(x) = [a(x+1) + b] - [ax + b] = ax + a + b - ax - b = a$$

Platí u všech lineárních funkcí.

Pedagogická poznámka: Hned v bodě a) část studentů ztroskotá na tom, že se snaží udělat všechno na jednou. Pokud ji poradíte, aby nejdříve spočítali $f(x)$, pak $f(x+1)$ a pak rozdíl (ve skutečnosti, jde o převedení na předchozí příklad), zvládnou to sami a příště si snad uvědomí že je důležité, aby v každém okamžiku věděli, co vlastně počítají.

U bodů d) a e) stačí opatrné dosazení.

Předchozí výsledky jsou samozřejmé,

$$\text{protože: } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x+1) - f(x)$$

Př. 3: Je dána obecná lineární funkce $y = ax + b$. Urči rozdíly:

a) $f(x+2) - f(x)$

b) $f(x) - f(x-1)$

c) $f(x+3) - f(x-1)$

Výsledky můžeme psát z paměti nebo je vypočítat ze vzorce $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

a) $f(x+2) - f(x)$

$$\Delta x = x + 2 - x = 2$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+2) - f(x)}{2} \Rightarrow f(x+2) - f(x) = 2a$$

b) $f(x) - f(x-1)$

$$\Delta x = x - (x-1) = 1$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-1)}{1} \Rightarrow f(x) - f(x-1) = a$$

c) $f(x+3) - f(x-1)$

$$\Delta x = x + 3 - (x-1) = 4$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+3) - f(x-1)}{4} \Rightarrow f(x+3) - f(x-1) = 4a$$

Př. 4: Urči předpis lineární funkce, pokud víš, že platí: $f(x) - f(x-2) = 3$ a $f(1) = 1$.

Více možností, jak příklad vyřešit.

$$f(1) = 1 \Rightarrow \text{dvojice } x, y [1; 1], \text{ druhou dvojicí dopočítáme}$$

$$f(x) - f(x-2) = 3 \Rightarrow f(x-2) = f(x) - 3$$

$$f(x-2) = f(x) - 3 \text{ dosadíme } x = 1 \text{ (tam už hodnotu známe)}$$

$$f(1-2) = f(1) - 3$$

$$f(-1) = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \text{druhá dvojice } x, y [-1; -2]$$

Sestavíme soustavu rovnic:

$$[1;1] \Rightarrow 1 = a \cdot 1 + b$$

$$[-1;-2] \Rightarrow -2 = a(-1) + b$$

vyjádříme b z první rovnice $1 - a = b$

dosadíme do druhé rovnice: $-2 = -a + b = -a + 1 - a$

$$-3 = -2a$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$b = 1 - a = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Jde o funkci $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Zkusíme to jinak:

$$f(x) - f(x-2) = 3$$

Co znamená $f(x) - f(x-2) = ax + b - [a(x-2) + b] = ax + b - (ax - 2a + b) = 2a$.

$$\text{Dosadíme } f(x) - f(x-2) = 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\text{Funkce prochází bodem } [1;1] \Rightarrow 1 = a \cdot 1 + b \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Funkce } y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Ještě jinak:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x) - f(x-2) = 3$$

$$\Delta x = x - (x-2) = 2$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} \text{ a dál už je to stejné jako před tím}$$

Př. 5: Pro lineární funkci $f(x)$ platí: $f(x+3) - f(x) = 2$ a $f(1) = \frac{1}{2}$. Bez toho, že by s určil její předpis, zjisti hodnoty pro $x=0$ a $x=5$.

$$f(x+3) - f(x) = 2, \text{ když se } x \text{ zvětší o } 3 \text{ zvětší se } y \text{ o } 2 \Rightarrow a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Známe } f(1) = \frac{1}{2}.$$

Chci $f(0)$, hodnotu pro x zmenšené o 1. Když zmenším x o jedna, zmenší se y o a .

$$f(0) = f(1) - a = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Známe } f(1) = \frac{1}{2}.$$

Chceme $f(5)$, hodnotu pro x zvětšené o 4. Když zmenšíme x o čtyři, zmenší se y o $4a$.

$$f(5) = f(1) + 4a = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{6}$$

Poznámka: (pro studenty): Nemá cenu se tuto hodinu učit nazpaměť. Pokud Vám nepřijdou vztahy mezi $f(x+1) - f(x)$ a a zcela samozřejmé, radši ji vynechejte. Časem bude možná pochopitelnější.

Př. 6: Petáková:
strana 27/cvičení 32

Shrnutí: Předpis funkce $y = f(x)$ nám umožňuje spočítat hodnotu nejen pro x , ale pečlivým dosazením i pro jiné hodnoty neznámé ($x+1$, $2x$, ...).