2.1.17 Parametrické systémy lineárních funkcí II

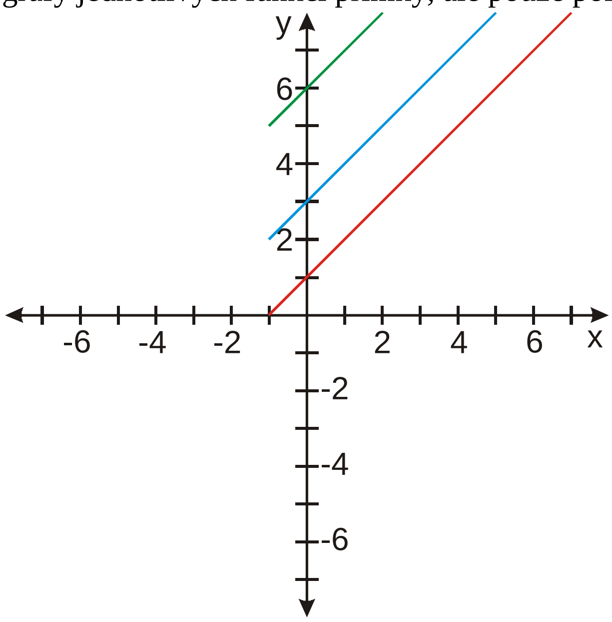
Předpoklady: 2116

Pedagogická poznámka: Celá hodina vznikla na základě jednoho příkladu ze sbírky úloh od Jindry Petákové. S příkladem mělo několik generací studentů velké problémy, nakonec jsem se rozhodl věnovat problematice celou hodinu. Ne kvůli příkladu samému, ale tomu, že dobře reprezentuje skupinu úloh, kde mají studenti sami něco objevovat.
Protože se v hodině používají parametry, musela nakonec vzniknout i předchozí hodina, která parametry vysvětluje.

Pedagogická poznámka: V hodině postupují různí studenti značně různými rychlostmi. Je jasné, že slabší studenti nemohou ani zdaleka stihnout všechny příklady. Společný postu koordinujeme tak, aby se Ti horší v tom příliš dlouho bezradně neplácali a všichni měli na konci alespoň chvilku na řešení příkladu 4.

Př. 1: Jsou dány lineární funkce $y = x + b; b \in \langle 1;\infty)$ s omezeným definičním oborem $x \in \langle -1;\infty)$. Nakresli grafy těchto funkcí. Jak jsou omezeny hodnoty těchto funkcí?

Pracujeme například s funkcemi: $y = x+1$, $y = x+3$, $y = x+6$, …
Protože za x nedosazujeme všechna reálná čísla, ale pouze čísla z intervalu $\langle -1;\infty)$ nebudou grafy jednotlivých funkcí přímky, ale pouze polopřímky:

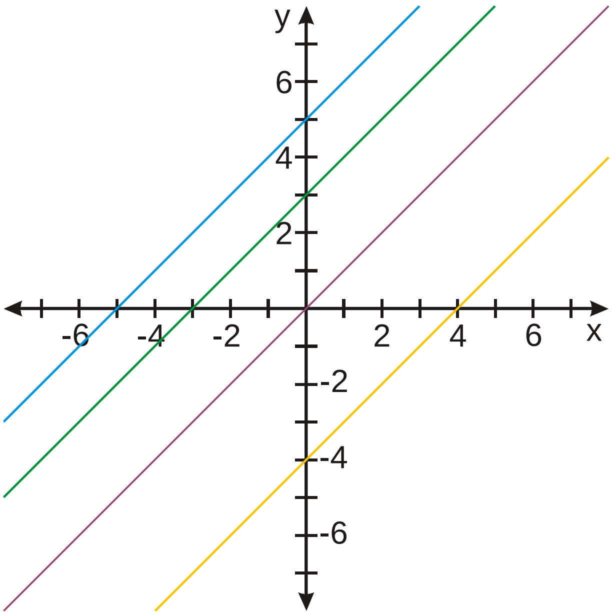


Protože graf funkce $y = x+1$ je ze všech uvažovaných funkcí posunutý nejníže, je vidět, že platí $y = f(x) \geq 0$

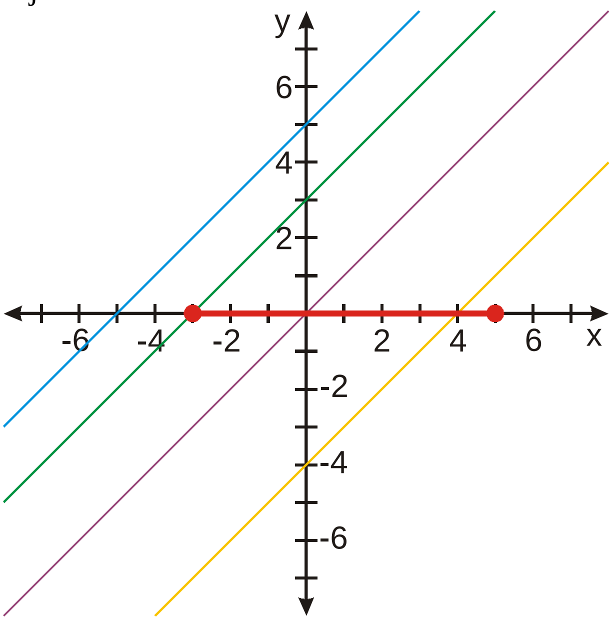
Př. 2: Najdi všech hodnoty parametru *b*, pro které pro lineární funkci $y = x + b$ platí: $\forall x \in \langle -3; 5 \rangle$ platí, že $f(x) > 0$.

Takový příklad jsme ještě nedělali $\Rightarrow$ musím řešení vyzkoumat. Začneme pokusem:

- nakreslíme do obrázku několik funkcí podle zadání
- s pomocí těchto funkcí zjistíme, jaký přesný význam mají podmínky ze zadání a zda je nakreslené funkce splňují



podmínka v zadání $\forall x \in \langle -3; 5 \rangle$ $\Rightarrow$ zajímáme se pouze o čísla z intervalu $\langle -3; 5 \rangle$, vyznačíme si je v obrázku



$f(x) > 0$ $\Rightarrow$ hodnoty pro červeně označené body na ose *x* musí být větší než nula $\Rightarrow$ body grafu musí být nad osou *x*

Procházíme grafy:

Žlutý nevyhovuje – například pro $x = 0$, je $f(x) = -4$

Fialový nevyhovuje – například pro $x = -1$, je $f(x) = -1$

Zelený nevyhovuje – pro $x = -3$, je $f(x) = 0$ (všechny ostatní hodnoty *x* by vyhovovaly)
Modrý vyhovuje – všechny červené hodnoty *x* mají kladné hodnoty *y*

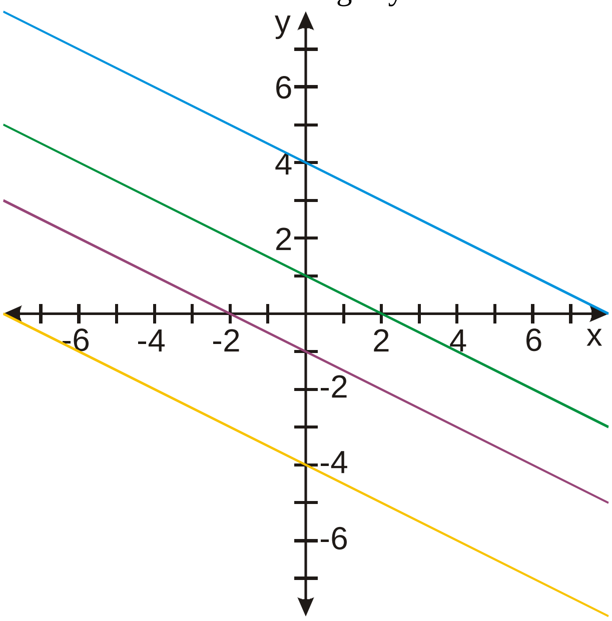
Hodnota parametru *b* posunuje grafy ve svislém směru $\Rightarrow$

- při pohybu modrého grafu nahoru bude podmínka $f(x) > 0$ vždy splněna
- při pohybu modrého grafu směrem dolů bude podmínka $f(x) > 0$ porušena

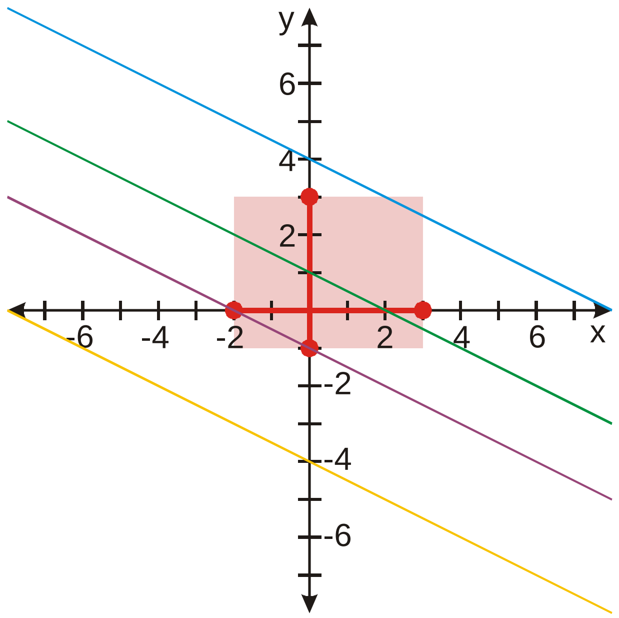
Kdy se to zkazí?
Když modrý graf přejde do zeleného. $\Rightarrow$ zelený graf je první, který nevyhovuje
Zelený graf = funkce $y = x + 3$
Podmínce ze zadání vyhovují všechny hodnoty parametru *b* z intervalu $(3; \infty)$.

Př. 3: Najdi všech hodnoty parametru *b*, pro které pro lineární funkci $y = -0,5x + b$ platí: $\forall x \in \langle -2; 3 \rangle$ platí, že $f(x) \in \langle -1; 3 \rangle$.

Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu.
Nakreslíme si do obrázku grafy několika funkcí, které odpovídají podmínkám zadání.

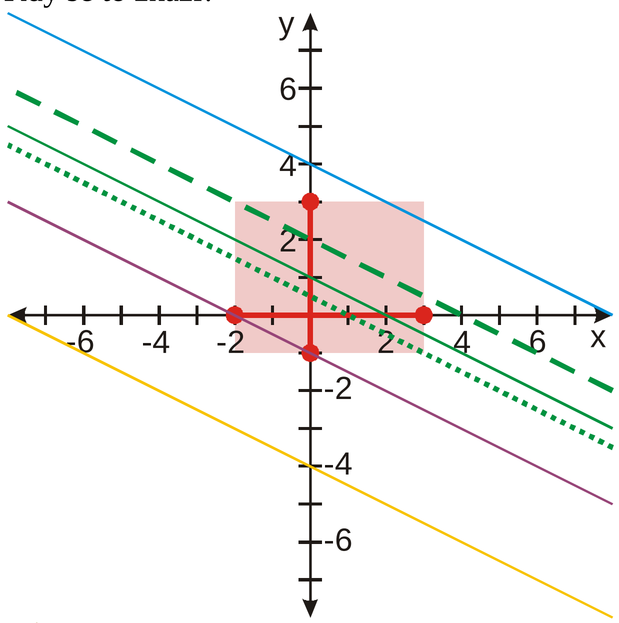


Vyznačíme hodnoty *x* i *y*, které jsou uvedeny v zadání:



pro hodnoty proměnné x z intervalu $\langle -2; 3\rangle$ musí být hodnoty $f(x) \in \langle -1; 3\rangle \Rightarrow$ funkce by se měla pohybovat v červeném obdélníku.
Procházíme grafy:
Žlutý nevyhovuje – všechny hodnoty pro $x \in \langle -2; 3\rangle$ jsou příliš malé (pod obdélníkem)
Fialový nevyhovuje – hodnoty pro $x \in (0; 3\rangle$ jsou příliš malé (pod obdélníkem)
Zelený vyhovuje – všechny hodnoty pro $x \in \langle -2; 3\rangle$ jsou v obdélníku
Modrý nevyhovuje – všechny hodnoty pro $x \in \langle -3; 2)$ jsou příliš velké (nad obdélníkem)

Hodnota parametru b posunuju grafy ve svislém směru $\Rightarrow$ mohu zelený graf posunou o kus nahoru i dolů.
Kdy se to zkazí?



- při pohybu nahoru v čárkované poloze, graf prochází bodem $[-2; 3]$ (všechny grafy, které budou výš už nebudou splňovat podmínky) $\Rightarrow$

funkce $y=-0,5x+b$, procházející bodem $[-2;3]$, hledám b

$3=-0,5(-2)+b \Rightarrow b=2$

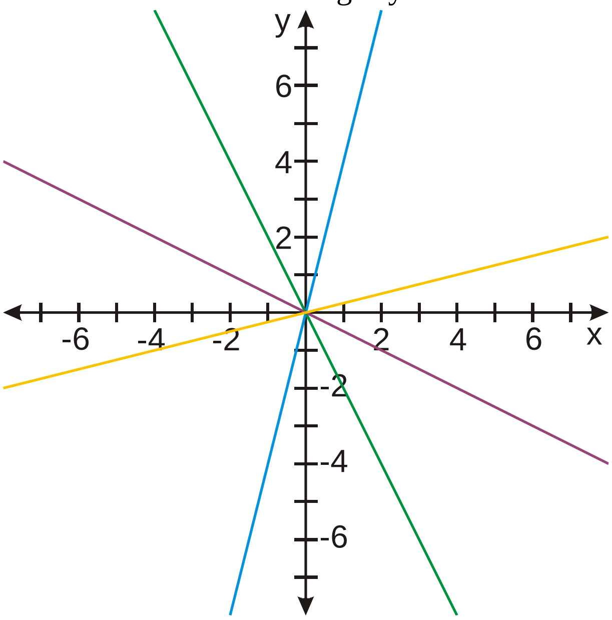
- při pohybu dolu v tečkované poloze, graf prochází bodem $[3;-1]$ (všechny grafy, které budou níž už nebudou splňovat podmínky) $\Rightarrow$
  funkce $y=-0,5x+b$, procházející bodem $[3;-1]$, hledám b

  $-1=-0,5(3)+b \Rightarrow b=0,5$

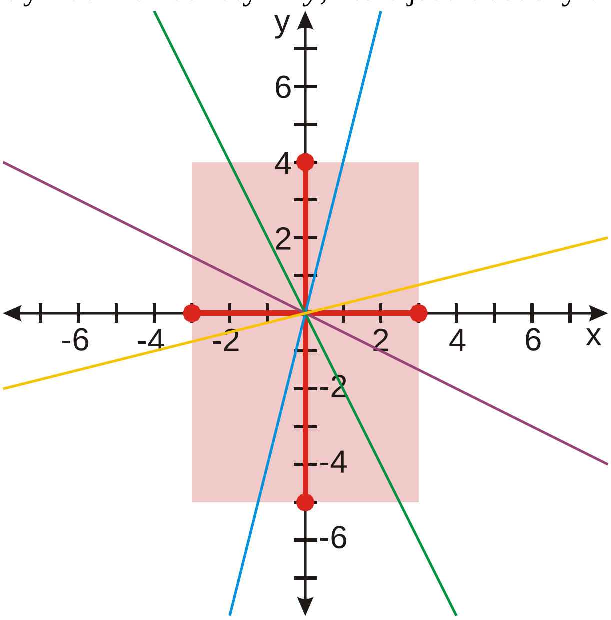
Zadání vyhovují všechny funkce $y=-0,5x+b$, kde $b \in \langle 0,5;2 \rangle$

Př. 4: Najdi všechny hodnoty parametru *a* takové, aby pro lineární funkci $y=ax$ platilo, že $\exists x \in \langle -3;3 \rangle$, pro které platí, že $f(x) \notin \langle -5;4 \rangle$.

Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu.
Nakreslíme si do obrázku grafy několika funkcí, které odpovídají podmínkám zadání.



Vyznačíme hodnoty *x* i *y*, které jsou uvedeny v zadání:



pro alespoň jedno x z intervalu $\langle -3; 3\rangle$ musí hodnota $f(x)$ ležet mimo interval $\langle -5; 4\rangle \Rightarrow$ funkce by se měla dostat mimo červený obdélník.
Procházíme grafy:

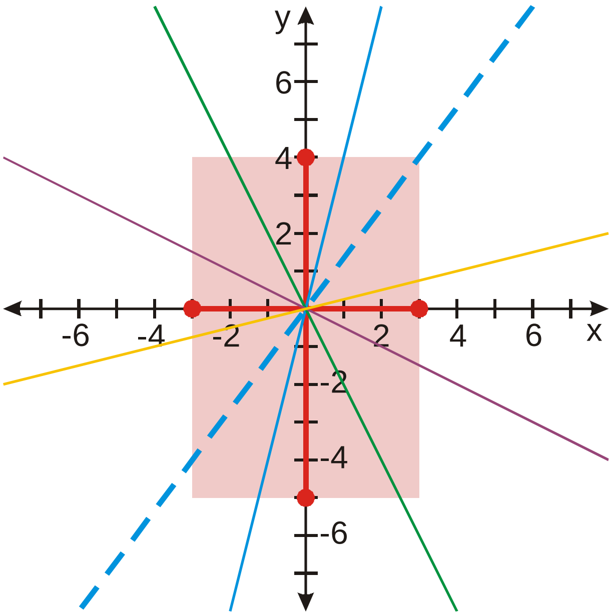
- Žlutý nevyhovuje – všechny hodnoty leží v obdélníku
- Fialový nevyhovuje – všechny hodnoty leží v obdélníku
- Zelený vyhovuje – hodnoty leží mimo obdélník nahoře i dole
- Modrý vyhovuje – hodnoty leží mimo obdélník nahoře i dole

Hodnota parametru a mění sklon grafu.
Měníme hodnotu a u modrého grafu:

- zvětšujeme $a \Rightarrow$ sklon grafu roste $\Rightarrow$ hodnot, které leží mimo obdélník bude přibývat $\Rightarrow$ graf bude stále splňovat podmínky zadání
- zmenšujeme $a \Rightarrow$ sklon grafu klesá $\Rightarrow$ hodnot, které leží mimo obdélník bude ubývat $\Rightarrow$ ve chvíli, kdy se graf dostane do čárkované polohy přestane splňovat podmínky zadání

  funkce $y = ax$, procházející bodem $[3; 4]$, hledáme a

  $$4 = a \cdot 3 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$



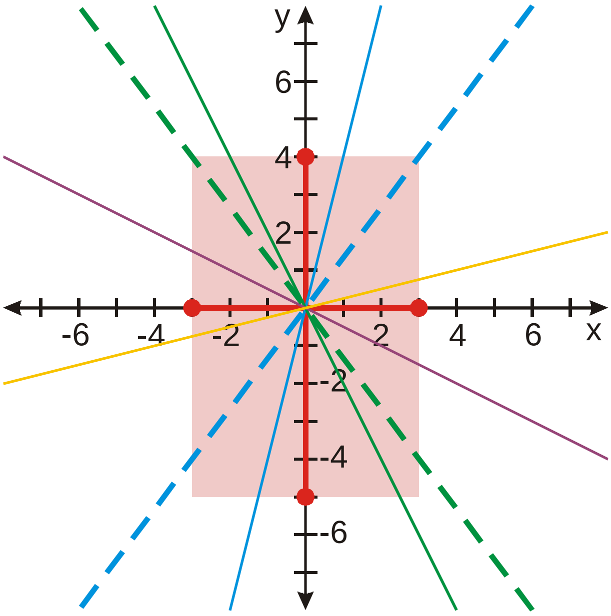
$\Rightarrow$ podmínkám zadání vyhovují všechny hodnoty parametru a z intervalu $\left(\frac{4}{3}; \infty\right)$

Měníme hodnotu a u zeleného grafu:

- zmenšujeme $a \Rightarrow$ sklon grafu roste $\Rightarrow$ hodnot, které leží mimo obdélník bude přibývat $\Rightarrow$ graf bude stále splňovat podmínky zadání
- zvětšujeme $a \Rightarrow$ sklon grafu klesá $\Rightarrow$ hodnot, které leží mimo obdélník bude ubývat $\Rightarrow$ ve chvíli, kdy se graf dostane do čárkované polohy přestane splňovat podmínky zadání

  funkce $y = ax$, procházející bodem $[-3; 4]$, hledáme a

  $$4 = a \cdot (-3) \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

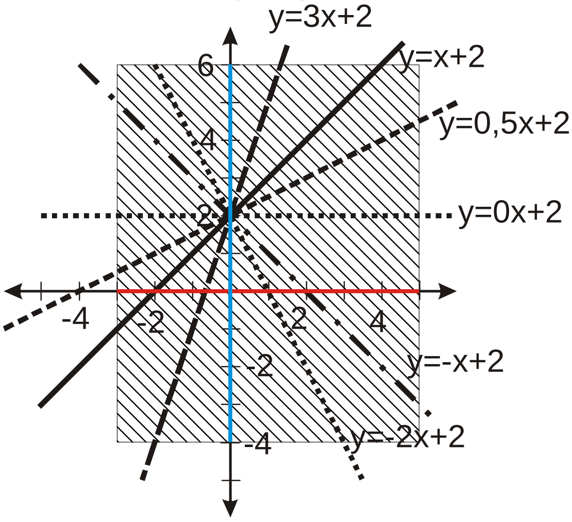


$\Rightarrow$ podmínkám zadání vyhovují všechny hodnoty parametru *a* z intervalu $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$

Parametr *a* může nabývat všechny hodnoty ze sjednocení intervalů $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$

Př. 5: Najdi všechny hodnoty parametru *a* takové, aby pro lineární funkci $y = ax + 2$ platilo, že pro $\forall x \in \langle -5; 5 \rangle$ platí, že $f(x) \in \langle -4; 6 \rangle$.

Nejdříve si nakreslíme obrázek s několika funkcemi typu $y = ax + 2$. Do obrázku také zakreslíme hodnoty *x* a *y* udané v zadání.



Z obrázku jsou zřejmé dvě věci:

1. Lineární funkce $y = ax + 2$ jsou všechny lineární funkce, které prochází bodem $[0;2]$. Jejich sklon může být libovolný. Zřejmě budeme hledat takové hodnoty parametru *a*, aby funkce měla správný sklon.
2. Pro červené hodnoty $x \in \langle -3; 5 \rangle$ musí vyjít modré hodnoty $y = f(x) \in \langle -4; 6 \rangle$.

Které z nakreslených funkcí vyhovují zadání?

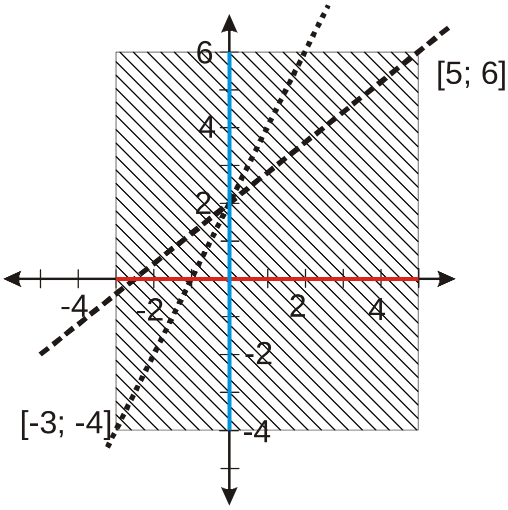
$y = 0,5x + 2$, $y = 0x + 2$ a $y = -x + 2$.

Jak se z obrázku pozná, že funkce vyhovují zadání?
Graf funkce se protíná pouze z bočními stranami vyšrafovaného obdélníku nebo jeho vrcholy.
Graf funkce se nesmí protnout s vnitřním bodem horní nebo dolní strany.

Které části intervalu $(-\infty;\infty)$ vyhovují zadání?

Pro velké hodnoty *a* jsou grafy funkcí příliš strmé a protínají se vodorovnými stranami. Existuje určitá kladná mezní hodnota *a*, při které graf prochází přesně vrcholem obdélníka. Všechny menší kladné hodnoty *a* jsou řešením. Podobně pro záporné hodnoty *a*. Pro velké záporné hodnoty *a* jsou grafy příliš strmé. Existuje určitá záporná mezní hodnota *a* pro kterou graf prochází přesně vrcholem obdélníka. Všechny menší záporné hodnoty *a* jsou řešením.
$\Rightarrow$ řešením je interval $(k;l)$.

Hledáme mezní hodnoty.
1. Kladná
Obě možnosti jsou nakresleny na obrázku.

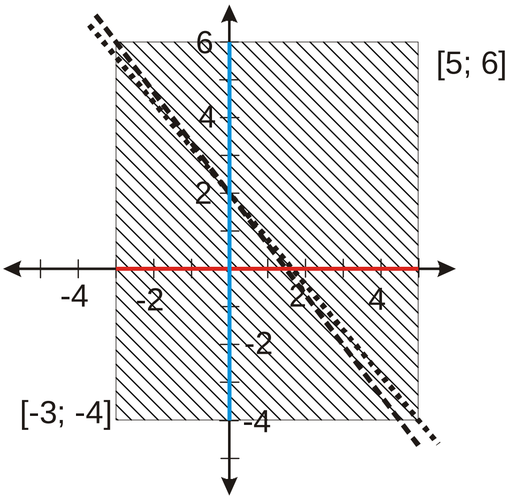


1. možnost – funkce $y = ax + 2$, prochází bodem $[5;6]$ $\Rightarrow$ $6 = a5 + 2 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

2. možnost – funkce $y = ax + 2$, prochází bodem $[-3;-4]$ $\Rightarrow$ $-4 = a(-3) + 2 \Rightarrow a = 2$

Největší kladnou hodnotou , která je řešením je $a = \frac{4}{5}$

2. Záporná
Obě možnosti jsou nakresleny na obrázku.



1. možnost – funkce $y = ax + 2$, prochází bodem $[5; -4]$ $\Rightarrow$ $5 = a(-4) + 2 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$

2. možnost – funkce $y = ax + 2$, prochází bodem $[-3; 6]$ $\Rightarrow$ $6 = a(-3) + 2 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$

Největší kladnou hodnotou , která je řešením je $a = -\frac{4}{5}$.

Řešením příkladu jsou $a \in \left\langle -\frac{4}{5}; \frac{4}{5} \right\rangle$

Př. 6: Petáková:
strana 27/cvičení 32
strana 28/cvičení 34
strana 27/cvičení 37
strana 27/cvičení 38
strana 27/cvičení 39

Shrnutí: