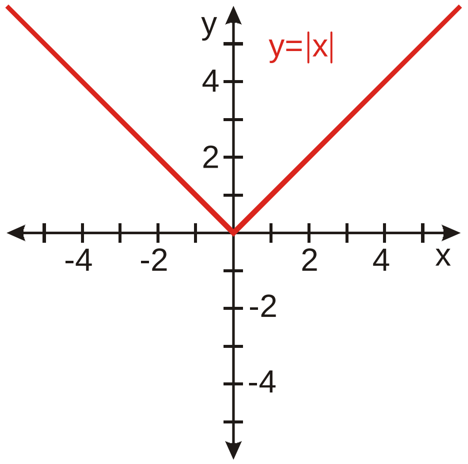
2.1.14 Funkce rostoucí, funkce klesající II

Předpoklady: 2113

Př. 1: Rozhodni, zda funkce $y=|x|$ na následujícím obrázku je rostoucí nebo klesající.



Pro záporná x jde funkce dolů, pro kladná x nahoru $\Rightarrow$ není ani rostoucí ani klesající.

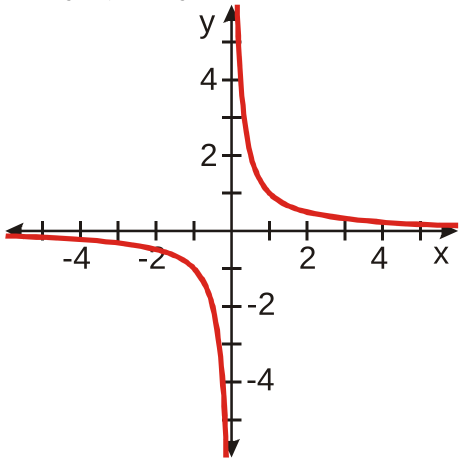
Kdybychom do porovnávání brali pouze kladná $x_1; x_2$, byla by rostoucí (pravá polovina grafu) $\Rightarrow$ **funkce je rostoucí v intervalu** $\langle 0;\infty)$ (je rostoucí pro kladná čísla).
Kdybychom do porovnávání brali pouze záporná $x_1; x_2$, byla by klesající (levá polovina grafu) $\Rightarrow$ **funkce je klesající v intervalu** $(-\infty;0\rangle$ (je klesající pro záporná čísla).

Př. 2: Zformuluj definici funkce rostoucí a klesající v intervalu *J*.

Definice:
Funkce *f* se nazývá rostoucí v intervalu *J* právě, když pro všechna $x_1; x_2$ z intervalu *J* platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

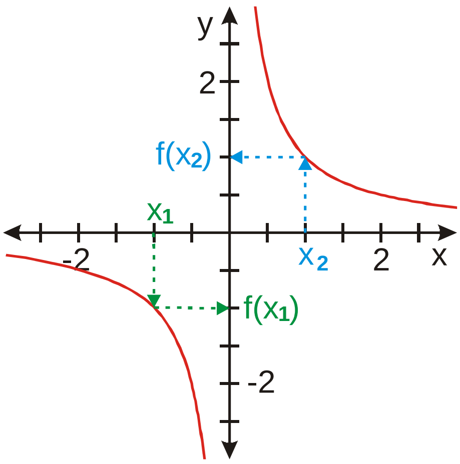
Definice:
Funkce f se nazývá klesající v intervalu *J* právě, když pro všechna $x_1; x_2$ z intervalu *J* platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Př. 3: Rozhodni, zda je funkce $y=\frac{1}{x}$ rostoucí nebo klesající. Případně zda je rostoucí (či klesající) v nějakém intervalu.



Graf funkce „jde pořád dolů", ale funkce není klesající (neplatilo by například porovnání pro $x_1=-2;\ x_2=2$).
Musíme $x_1;\ x_2$ vybírat pouze z intervalu $(-\infty;0)$ nebo z intervalu $(0;\infty)$. V těchto intervalech je funkce klesající.

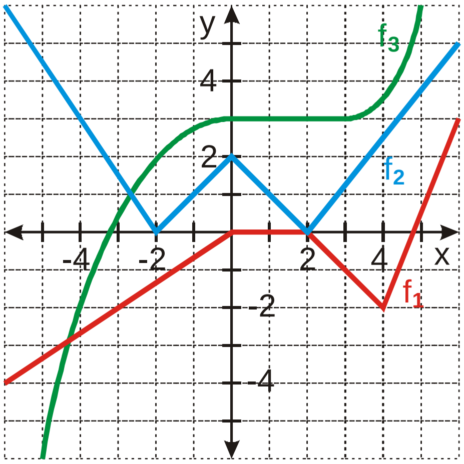
Př. 4: Do grafu funkce $y=\frac{1}{x}$ nakresli dva body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$ tak, aby z jejich polohy bylo zřejmé, že funkce $y=\frac{1}{x}$ není klesající.



Platí: $x_1<x_2$, ale neplatí $f(x_1)>f(x_2)$ $\Rightarrow$ funkce není klesající.

Pedagogická poznámka: Příklad vypadá zbytečně, řešení bylo řečeno už v předchozím příkladu (vždy dotyčné body na tabuli ukazuji nebo kreslím, před zadáním příkladu 4 se je snažím nenápadně smazat), ale kupodivu se najde dost takových, kteří to stihnou zapomenout nebo to v předchozím příkladě nepochopili. Ptám se studentů, kteří v příkladě 3 špatně odhadovali, že funkce $y=\frac{1}{x}$ je klesající, zda jsou si jistí, že si svoji chybu už budou vždy pamatovat a zda si nemyslí, že tuto dvojici bodů měli mít v sešitu nakreslenou i bez předchozího příkladu.

Př. 5: Na obrázku jsou nakresleny grafy funkcí f_1; f_2; f_3 urči intervaly, ve kterých jsou funkce rostoucí (klesající).



funkce f_1:

- rostoucí $(-\infty;0\rangle$; $\langle 4;\infty)$
- klesající $\langle 2;4\rangle$
- konstantní $\langle 0;2\rangle$

funkce f_2:

- rostoucí $\langle -2;0\rangle$; $\langle 2;\infty)$
- klesající $(-\infty;-2\rangle$ $\langle 0;2\rangle$

funkce f_3:

- rostoucí $(-\infty;0\rangle$; $\langle 3;\infty)$
- konstantní $\langle 0;3\rangle$

Př. 6: Petáková:
strana 25/cvičení 19
strana 25/cvičení 20

Pedagogická poznámka: Následující příklady nesouvisí přímo s rostoucími a klesajícími funkcemi. Jde v nich v prvé řadě o to, aby se studenti naučili udělat **libovolnou** funkci, která splňuje nějaké podmínky. Slovo libovolnou je tučně, protože právě libovolnost jim dělá velké potíže, jsou vedeni k opakování naučených postupů a jakákoliv libovolnost je pro ně problém.

Pedagogická poznámka: U výsledků následujícího příkladu je nutné dbát na to, že nejde o znalosti určené k naučení (zapamatování), že jde jenom o důsledky základních pravidel pro kreslení grafů a je možné je formulovat mnoha různými způsoby. Témto způsobem je třeba pohlížet i na uvedené řešení.

Př. 7: V následujících příkladech budeš kreslit libovolné funkce, které splňují dané podmínky. Rozhodni, jak bude možné na výsledném obrázku zkontrolovat (nebo při jeho kreslení splnit) splnění jednotlivých vlastností v tomto seznamu:

a) jde o funkci b) prochází daným bodem
c) má daný definiční obor d) má daný obor hodnot
e) je prostá f) je rostoucí (nebo klesající)

a) jde o funkci
v grafu nesmí být dva body přímo nad sebou

b) prochází daným bodem
vyznačím bod, který musí být součásti grafu

c) má daný definiční obor
na ose *x* vyznačíme definiční obor a ke každému vyznačenému číslu musí existovat bod v grafu

d) má daný obor hodnot
na ose *y* vyznačíme obor hodnot a ke každému vyznačenému číslu musí existovat bod v grafu

e) je prostá
v grafu nesmí být dva body ve stejné výšce

f) je rostoucí (nebo klesající) v intervalu
vyznačíme na ose *x* interval a v této oblasti musí jít graf buď nahoru (rostoucí) nebo dolů (klesající)

Pedagogická poznámka: Následující příklad řeší studenti ve dvojicích. Každý má své zadání, nakreslí svou funkci a poté předá sousedovi. Soused nekontroluje správnost, ale pouze určuje vlastnosti, které má nakreslená funkce a kterých se týkalo zadání. Například pokud v zadání měla funkce mít určitý definiční obor, soused určí definiční obor nakreslené funkce. Pak si sousedi papíry opět vymění a každý zjistí, zda podmínky splnil nebo ne.
Při řešení tohoto příkladu je třeba bojovat se dvěma syndromy:
a) **„dělám jen to, co mi dovolili ve škole“**
Studenti se snaží dodržovat nějaká omezení, která jim nikdy nikdo nedal (důsledek toho, že česká škola tíhne k omílání učitelstvem schválených postupů). Máloco dovede studenty do takových rozpaků jako fakt, že můžou tu čáru udělat z jednoho bodu do druhého téměř jakkoliv. Celá dosavadní zkušenost jim říká, že určitě bude existovat jen jeden způsob, jak se to dá udělat „správně“ a když nedokážou najít ten jediný způsob jsou zcela bezradní.
b) **„vždyť to mám přece správně“**
Existuje poměrně početná skupina, kteří dokážou bez problémů určit definiční obor funkce nakreslené na tabuli. Když si však mají zkontrolovat svůj graf, který nakreslili a který má mít určitý definiční obor, zjistí, že ho nakreslili správně i když je úplně špatně. Vědomí, že ho kreslili s tím, aby splňoval zadání je vede neodvratně k tomu, že ho považují za správný ať je sebehorší. Nejsou totiž schopni nezaujatého přístupu ke grafu, jaký používají, když studují obrázek od učitele. Tohle je zásadní nedostatek (a hodně vysvětluje, proč mají studenti tak chabou

schopnost sebekontroly obecně).
Kvůli tomuto je v příkladech zavedena křížová kontrola a fakt, že soused jim obrázek pořád vrací s tím, že definiční obor je špatně (i když podle jejich „kontrolování“ je dobře) je vede k tomu, aby se pokusili na svém „kontrolování“ něco změnit.

Pedagogická poznámka: Pokud by se k následujícímu zadání přidalo ještě pár řádek, stačilo by to na celou hodinu práce. Mám trochu pocit, že následující příklad by si zasloužil více času než 10-15 minut, které ke konci hodiny zbudou. Možná by se dala využít čas, který zbude z následující hodiny, která také vyžaduje více než jednu vyučovací hodinu.

Př. 8: Následující příklad řešte ve dvojicích. Každý z dvojice má ve svém sloupci zadání, které vyřeší. Hotový příklad předá sousedovi a požádá ho o zkontrolování výsledku.
Nakresli libovolnou funkci, která najednou splňuje následující podmínky:

$D(f)=\left\{-2;0;3;\sqrt{13}\right\}$, funkce je prostá	$H(f)=\left\{-3;\sqrt{2};2;4\right\}$, funkce je klesající
$D(f)=R$, $H(f)=\langle -2;4\rangle \cup \{5\}$	$D(f)=\{-4\}\cup\langle -1;4\rangle$, $H(f)=R$
$D(f)=(-4;-2)\cup\langle -1;4\rangle$, $H(f)=R$, $f(0)=3$	$D(f)=R$, $H(f)=\langle -3;1\rangle\cup(2;4)$, $f(2)=1$
$D(f)=R$, $H(f)=(-4;1)\cup\langle 2;5\rangle$, $f(2)=3$, klesající v intervalu $\langle 1;4\rangle$	$D(f)=R$, $H(f)=(-5;-1)\cup\langle 1;4\rangle$, $f(-2)=3$, rostoucí v intervalu $\langle -3;0\rangle$

Pedagogická poznámka: Hned v prvním zadání se dobře uplatní křížová kontrola. Polovina studentů nakreslí místo samostatných bodů plnou čáru, jejíž definiční obor (nebo obor hodnot) kontrolující většinou správně zapíše pomocí intervalu.

Shrnutí: Funkce můžem být rostoucí nebo klesající kromě celého definičního oboru i v pouhém intervalu.